Jednoduchý důkaz trojúhelníkové nerovnosti

Jakub Michálek

10. září 2006

1. Uvažujme $\triangle \mathsf{ABC}$, který umístíme do soustavy souřadnic Oxy tak, že bod $\mathsf{A}\,[0,0]$ bude v počátku, bod $\mathsf{B}\,[x_B,0]$ bude ležet v kladném smyslu na ose x a bod $\mathsf{C}\,[x_C,y_C]$ leží v dané rovině. Vrcholy trojúhelníka jsou nekolineární.

2. Chceme dokázat, že platí $b+c>a$. Pokud to dokážeme pro všechny hodnoty x_B, x_C, y_C, budeme moci podle principu cyklické záměny považovat tvrzení za dokázané pro všechny strany obecného trojúhelníka.

3. Vzdálenost určíme podle Pythagorovy věty.

$$\begin{aligned} b &= \sqrt{x_C^2+y_C^2} \\ c &= x_B \\ a &= \sqrt{\left(x_C-x_B\right)^2+y_C^2} \end{aligned}$$

4. Vyjádříme obě strany rovnice a jejich druhé mocniny. Uvědomme si, že vzdálenost je nezáporná veličina (v našem případě kladná). Proto se jedná o ekvivalentní úpravu.

$$\begin{aligned} b+c &= \sqrt{x_C^2+y_C^2}+x_B \\ (b+c)^2 &= x_C^2+y_C^2+x_B^2+2x_B\sqrt{x_C^2+y_C^2} \\ a^2 &= \left(x_C-x_B\right)^2+y_C^2 = x_C^2+x_B^2+y_C^2-2x_Cx_B \end{aligned}$$

5. Provádějme separátně ekvivalentní úpravy

$$\begin{aligned} (b+c)^2-\left(x_C^2+y_C^2+x_B^2\right) &= 2\sqrt{x_C^2+y_C^2}\,x_B \\ a^2-\left(x_C^2+y_C^2+x_B^2\right) &= -2x_Cx_B \end{aligned}$$

6. Vydělme obě rovnice kladným (viz definici výše) $2x_B$

$$\begin{aligned} \frac{(b+c)^2-\left(x_C^2+y_C^2+x_B^2\right)}{2x_B} &= \sqrt{x_C^2+y_C^2} \\ \frac{a^2-\left(x_C^2+y_C^2+x_B^2\right)}{2x_B} &= -x_C \end{aligned}$$

7. Rozdělme úlohu na dva případy.

   (a) Pokud je x_C kladné, bude nerovnost splněna, neboť první výraz bude kladný a druhý záporný.

   (b) Pokud je $x_C$záporné, bude druhý výraz kladný. Pokud umocníme oba výrazy na druhou a odečteme od obou výrazů x_C, bude první výraz y_C^2 a druhý nula. Z nezápornosti druhé mocniny a z podmínky nekolinearity bodů plyne hledaná nerovnost. ♠