Součet posloupnosti kvadrátů

Jakub Michálek

19. června 2006

Definice

1. *Zobrazením* $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ nazveme $f \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, splňuje-li $(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.
2. *Posloupností* nazveme zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
3. n-tý člen značíme a_n.
4. *Aritmetická posloupnost* splňuje $\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d$. Číslo $d \in \mathbb{R}, d \neq 0$ zveme diference.

Součet aritmetické posloupnosti

Součet prvních n členů aritmetické posloupnosti je $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.
Důkaz: Dvojnásobek součtu bude roven

$$\begin{array}{rclcccccc}
s_n & = & a_1 & + & a_1 + d & + & \cdots & + & a_1 + (n-1)\,d \\
s_n & = & a_1 + (n-1)\,d & + & a_1 + (n-2)\,d & + & \cdots & + & a_1 \\
2s_n & = & 2a_1 + (n-1)\,d & + & 2a_1\,(n-1)\,d & + & \cdots & + & 2a_1\,(n-1)\,d \\
s_n & = & \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)\,d) & & & & & &
\end{array}$$

Součet posloupnosti kvadrátů

Definujeme *posloupnost kvadrátů* $a_n = n^2$, její součet je

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = s_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \tag{1}$$

Přepíšeme podle definice násobení (řádky pod sebou se sčítají).

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & & \\
 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & & \\
 & & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & & \\
 & & & 4 & 5 & \cdots & n & = & s_n \\
 & & & & 5 & \cdots & n & & \\
 & & & & & \cdots & n & & \\
 & & & & & & n & &
\end{array} \tag{2}$$

Vyřešme nejprve jednodušší úlohu: jaký je součet prvních p členů aritmetické posloupnosti začínající číslem n s diferencí $d = -1$. Podle vzorce výše máme

$$s_p = \frac{p}{2}\left(2n - (p-1)\right) \tag{3}$$

Ve vztahu (2) můžeme jednotlivé řádky brát jako *aritmetické posloupnosti*, ve kterých se první člen vždy zvyšuje. Suma této posloupnosti bude

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{2}\left(2n + 1 - p\right) = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{2}\left(2n+1\right) - \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{2} p$$

Sumu součtu si můžeme rozdělit na dvě sumy (to je pouze formální úprava). Není však druhý součet známý? Pochopitelně se jedná o stejný výraz jako v definici (1).

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{2}\left(2n+1\right) - \frac{s_n}{2} \Rightarrow s_n = \frac{2}{3} \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{2}\left(2n+1\right)$$

Všiměte si, že v sumě je $(2n+1)$ konstanta, protože první člen je stejný, lze ho vytknout před sumu a nahradit z odvozeného vztahu pro součet aritmetické posloupnosti

$$s_n = \frac{1}{3}\left(2n+1\right) \sum_{p=1}^{n} p = \frac{1}{3}\left(2n+1\right) \frac{n\left(n+1\right)}{2} = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

Potvrzení matematickou indukcí

Získali jsme očekávaný výsledek. Dokažme ho nakonec matematickou indukcí

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= \frac{\left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(2n+3\right)}{6} \quad (?) \\
s_{n+1} &= \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6} + \left(n+1\right)^2 \\
&= \left(n+1\right) \frac{2n^2 + n + 6n + 6}{6} \\
&= \left(n+1\right) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}
\end{aligned}$$

Jak lze ověřit roznásobením, skutečně platí $\left(n+2\right)\left(2n+3\right) = 2n^2 + 7n + 6$, což se schoduje s odvozeným, tvrzení platí. Je potřeba ověřit, že platí alespoň pro jedno $n \in \mathbb{N}$, potom platí pro všechny. Pro jedničku

$$s_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1,$$

tedy tvrzení skutečně platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$.