Sčítací posloupnosti – pár blábolů

Jakub Michálek

9. června 2006

Definice

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= A,\ A \in \mathbb{Z},\ A > 0 \end{aligned}$$

Jednoduchý případ

Zkoumejme nejprve jednoduchý případ, kdy $A = 1$. Pak posloupnost začíná

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

„Program" pro vypsání této posloupnosti:

```
for($i=1,$j=1,$i<1000;$h=$j,$j+=$i,$i=$h) echo $i.", ";
```

Limita obecné posloupnosti

Posloupnost $A = 1$ nazveme Fibonacciho. Její n-tý člen značím F_n. Spočteme limitu obecné posloupnosti. Vypišme několik prvních členů posloupnosti v tabulce

n	F_n
1	1
2	A
3	$A+1$
4	$2A+1$
5	$3A+2$
6	$5A+3$
7	$8A+5$

Z tabulky je zřejmé, že n-tý člen této posloupnosti vypočteme jako $AF_{n-1} + F_{n-2}$. Jaký potom bude poměr dvou následujících členů?

$$a = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}$$

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{AF_{n-1} + F_{n-2}}{AF_n + F_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}}{A\frac{F_n}{F_{n-1}} + \frac{F_{n-1}}{F_{n-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{A + a}{\frac{A}{a} + 1} = a$$

Každá posloupnost začínající jedničkou má stejnou limitu jako Fibonacciho.

Limita Fibonacciho posloupnosti

$$\frac{1}{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = 1 + a$$

Dokázal jsem, že podíl dvou následujících členů má limitu (existence limity vyplývá z podílového kritéria). Tuto limitu ještě spočtu

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= 1 + a \\ 0 &= a^2 + a - 1 \\ D &= 1 + 4 = 5 \\ a &= \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \doteq 0,6180 \end{aligned}$$

Jak však plyne z definice posloupnosti (součet kladných čísel je větší než každý ze sčítanců), vyhovovuje pouze kořen s minusem.