Hopsání, skákání a kývání – stručně a srozumitelně

Jakub Michálek

7. června 2006

Poloha závaží

Zavěsíme-li závaží na pružinu, uvidíme houpání nahoru a dolů. To naznačuje, že pohyb bude periodický. Naš úkol: popsat závislost výchylky na čase.

Výchylku měříme v metrech. Nejjednodušší cesta, jak získat metry: už mít metry, jenom to pronásobit něčím bezrozměrným.

Periodičnost funkce znamená, že v čase o periodu T později bude mít zavěšené těleso stejnou polohu a stejnou rychlost. Periodická je třeba funkce sinus.

Podmínkce *periodičnosti* a výsledku v metrech vyhovuje například výraz

$$y\left(t\right)=y_{\mathrm{m}}\sin\left(f\left(t\right)\right).$$

$f\left(t\right)$ značí nějakou závislost na čase. Víme kolik je sinus třiceti stupňů, ale dokážeme si představit sinus třiceti sekund? Výsledek v závorce musí být tudíž bezrozměrný. Funkce $f\left(t\right)$ musí ze sekund nějak vyrobit bezrozměrné číslo. Nejjednodušší cesta je vydělení sekundou. Pohyb nemůže záviset na ničem jiném než na tuhosti pružiny a na hmotnosti tělesa.

Tuhost pružiny je definována $F=-kl$, kde l je o kolik pružinu natáhneme (v metrech) a F je síla (v Newtonech). Z toho plyne, že jednotky tuhosti jsou $[k]=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Newton lze však zapsat ze vztahu pro sílu $[F]=[ma]=\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\Rightarrow[k]=\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^2}=\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2}$. Jak vyrobit z jednotek tuhosti dělení sekundou? Vydělíme tuhost hmotností, tím dostaneme $\left[\frac{k}{m}\right]=\frac{1}{\mathrm{s}^2}$, výsledek odmocníme $\sqrt{\left[\frac{k}{m}\right]}=\frac{1}{\mathrm{s}}$. Abychom nemuseli pořád psát to samé, označíme si $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Pokud omegou (s rozměrem „za sekundu“) vynásobíme čas, dostaneme kýžené bezrozměrné číslo. Celkový výsledek tedy zní

$$y\left(t\right)=y_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t\right),\quad\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Funkce sinus má periodu 2π. Položme argument sinu roven této hodnotě

$$\begin{aligned}2\pi&=\omega T\\T&=\frac{2\pi}{\omega}\end{aligned}$$

V tomto čase budou hodnoty rychlosti a polohy stejné, proto čas nazýváme *perioda.* Zbývá poslední věc: ošetřit, jak začínal pohyb. Pokud je v nulovém čase nulová výchylka, platí rovnice se sinem nezměněně. Pokud je v nulovém čase maximální výchylka, nahradíme sinus cosinem (ten potom dá pro nulu jednička a vše souhlasí). Pokud pohyb začíná v nějaké předem neurčité poloze, přidáme abstraktní *fázový posun* φ.

$$y\left(t\right)=y_{\mathrm{m}}\sin\left(\omega t+\varphi\right)$$

Příklad Závaží bylo v čase t_1 ve výšce h nad svou rovnovážnou polohou. Jaký bude fázový posun φ?

Řešení V našem případě je $y = h$. Dosadíme tedy pouze do rovnice a zní vyjádříme fázový posun

$$\begin{aligned} y(t_1) = h &= y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi) \\ \omega t_1 + \varphi &= \arcsin\left(\frac{h}{y_\mathrm{m}}\right) \Rightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{h}{y_\mathrm{m}}\right) - \omega t_1 \end{aligned}$$

Funkce arcsin je funkce inverzní k funkci sin. Na kalkulačkách se značí $\sin^{-1}$. Úhel je nutno převést na základní úhel.

Příklad Závaží kmitá s amplitudou $y_\mathrm{m} = 0,1\mathrm{m}$ a periodou $T = 1\mathrm{s}$. V čase $t_1 = 0,2\,\mathrm{s}$ bylo ve výšce $0,05$ m. Určete fázový posun.
Řešení Dosazením do vzorce výše a užitím vztahu $\omega = \frac{2\pi}{T}$ dostaneme $\varphi \doteq -0,733 = 5,55$ po přičtení 2π.

Rychlost a zrychlení

Rychlost měříme v metrech za sekundu. Musíme tedy vztah pro závislost výchylky na čase vydělit sekundami. Jednotku „za sekundu“ má *úhlová rychlost* ω, stačí jí tedy celý vztah vynásobit. Uvědomme si však, že v krajní poloze, kdy byla výchylka největší je rychlost nulová, protože závaží se do teď'ka vzdalovalo a hodlá se zase přibližovat k rovnovážné poloze. Místo jedničky bychom chtěli od funkce nulu, naopak místo nuly (v rovnovážné poloze je výchylka nulová a rychlost maximální) bychom chtěli jedničku. To splňuje funkce cosinus. Celý vztah vypadá

$$v = \omega y_\mathrm{m} \cos(\omega t + \varphi)$$

Zrychlení měříme v jednotkách metr za sekundu. Vztah pro zrychlení získáme tak, že vynásobíme rychlost omegou. Pokud je těleso nejvíce vychýleno, působí na něj nejvíce síla (čím více pružinu natáhneme, tím větší síla působí), a tak je zrychlení největší. Můžeme nechat funkci sinus jako u výchylky. Těleso však vždy zrychluje směrem k rovnovážné poloze (na opačnou stranu, než je vychýleno), proto znaménko minus. Vztah tedy je

$$a = -\omega^2 y_\mathrm{m} \sin(\omega t + \varphi)$$

Všimněte si, že argument se nemění.

Příklad Rozměrovým odhadem zjistěte, jaká bude úhlová frekvence kyvadla ω, jehož pohyb může záviset na hmotnosti m, tíhovém zrychlení g a délce lanka l.
Řešení Tíhové zrychlení má jednotky $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, vydělíme jej vzdáleností v metrech $\left[\frac{g}{l}\right] = \frac{1}{\mathrm{s}^2}$ a odmocníme $\left[\sqrt{\frac{g}{l}}\right] = \frac{1}{\mathrm{s}}$, čímž dostáváme hledaný rozměr „za sekundu“.

Příklad Závaží na pružině s tuhostí k koná harmonické kmity s frekvencí f. Jaká je hmotnost závaží? Pokud je počáteční výchylka y_1 a počáteční rychlost v_1, jak bude vypadat rovnice kmitů, jaké bude zrychlení v čase t_2?
Řešení. *Frekvence* má rozměr „za sekundu“. Platí, že frekvence je počet kmitů za jednu sekundu. Jeden kmit trvá T, stihne se jich vykonat $f = \frac{1}{T}$. Pro periodu už vztah známe, úhlová rychlost bude $\omega = 2\pi f$. Pro úhlovou rychlost platí též $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Z rovnosti vyjádříme hmotnost $m = \frac{k}{4\pi^2 f^2}$. Máme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} y_1 &= y_\mathrm{m} \sin(\omega \cdot 0 + \varphi) = y_\mathrm{m} \sin(\varphi) \\ v_1 &= \omega y_\mathrm{m} \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = \omega y_\mathrm{m} \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Obě rovnice podělíme a vyjádříme φ

$$\frac{y_1}{v_1} = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\omega} \Rightarrow \varphi = \mathrm{arctg}\frac{\omega y_1}{v_1}$$

Teď pouze dosadíme do první rovnice a vyjádříme amplitudu jako $y_{\mathrm{m}} = \frac{y_1}{\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega y_1}{v_1}\right)}$. Pro zrychlení použijeme vztah

$$a(t_1) = -4\pi^2 f^2 \frac{y_1}{\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega y_1}{v_1}\right)} \sin\left(2\pi f t_1 + \operatorname{arctg}\frac{\omega y_1}{v_1}\right)$$

Příklad Kyvadlo vychýlíme o dva stupně z rovnovážné polohy. Za jak dlouho urazí kyvadlo první stupeň své dráhy? Jaká bude jeho průměrná rychlost na tomto úseku? Jaká bude rychlost v této poloze?
Řešení V příkladu výše jsme určili úhlovou rychlost $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Amplituda teď budou dva stupně, to je v radiánech $2° = \frac{\pi}{90}$. Rovnice kyvadla tudíž bude

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_{\mathrm{m}} \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \\ \phi = \frac{\phi_{\mathrm{m}}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} &= \cos\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}\right) \\ \frac{\pi}{3} &= t\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

Zdůvodněte, proč užíváme funkce kosinus. Průměrná rychlost je dráha za čas. Ujetá dráha je délka závěsu krát ujetý úhel, z toho plyne

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{l\phi}{\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}90}\sqrt{lg} = \frac{\sqrt{lg}}{30}$$

Rychlost zjistíme pouhým dosazením do vzorce (proveďte úvahu o znaménku a o tom, jaká tam má být funkce)

$$\begin{aligned} v(t) &= -\omega\phi_{\mathrm{m}} \sin(\omega t) \\ v\left(\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\right) &= -\omega\phi_{\mathrm{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \\ v &= -\omega\phi_{\mathrm{m}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{180}\sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

Toto však není rychlost, kterou se bude kyvadélko pohybovat (rozmyslete si, jaké má tato rychlost jednotky a jaké jednotky má průměrná rychlost).

Cvičení Jak dlouho bude trvat, skočíte-li do díry provrtané do Austrálie, než urazíte třetinu cesty k jádru?
Nápověda V uzavřené duté slupce nepůsobí žádná gravitační síla. Odpor neuvažujte.