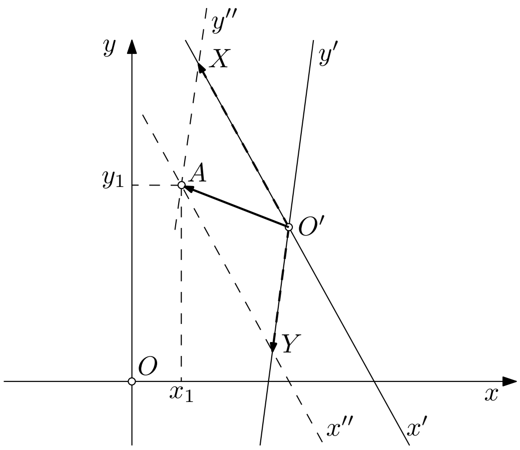
Algebraické cvičení: Nová soustava

Jakub Michálek

3. června 2006

Zadání

V soustavě souřadnic Oxy jsou zadány dvě přímky x', y' se směrnicemi k_x, k_y protínající se v bodě $O'\,[x_0, y_0]$. Jaký průvodič $\boldsymbol{r}'$ v soustavě $O'x'y'$ bude mít bod $[x_1, y_1]$?



Řešení

Tabulka značení útvarů	
y''	$y''\|\|y', A \in y''$
x''	$x''\|\|x', A \in x''$
X	$X = y'' \cap x'$
Y	$Y = x'' \cap y'$

1. Napíšeme rovnice přímek y', x', y'', x''

$$\begin{aligned} y': \quad y &= k_y (x - x_0) + y_0 \\ x': \quad y &= k_x (x - x_0) + y_0 \\ y'': \quad y &= k_y (x - x_1) + y_1 \\ x'': \quad y &= k_x (x - x_1) + y_1 \end{aligned}$$

2. Nyní zjistíme souřadnice bodu Y v soustavě Oxy

$$\begin{aligned} k_x x - k_x x_1 + y_1 &= k_y x - k_y x_0 + y_0 \\ x_Y &= \frac{k_x x_1 - k_y x_0 + y_0 - y_1}{k_x - k_y} \\ y_Y &= y'(x_Y) = k_y \left(\frac{k_x x_1 - k_y x_0 + y_0 - y_1}{k_x - k_y} - x_0 \right) + y_0 \\ &= k_y \left(\frac{k_x x_1 - k_x x_0 + y_0 - y_1}{k_x - k_y} \right) + y_0 \end{aligned}$$

3. Podobně souřadnice bodu X

$$\begin{aligned} k_y x - k_y x_1 + y_1 &= k_x x - k_x x_0 + y_0 \\ x_X &= \frac{k_x x_0 - k_y x_1 + y_1 - y_0}{k_x - k_y} \\ y_X &= x'(x_X) = k_x \left(\frac{k_x x_0 - k_y x_1 + y_1 - y_0}{k_x - k_y} - x_0 \right) + y_0 \\ &= k_x \left(\frac{k_y x_0 - k_y x_1 + y_1 - y_0}{k_x - k_y} \right) + y_0 \end{aligned}$$

4. Souřadnice x' je stejná (až na znaménko) jako vzdálenost $|XO'|$

$$\begin{aligned} |XO'| &= \sqrt{(x_X - x_0)^2 + (y_X - y_0)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{k_y x_0 - k_y x_1 + y_1 - y_0}{k_x - k_y} \right)^2 + \left(k_x \left(\frac{k_y x_0 - k_y x_1 + y_1 - y_0}{k_x - k_y} \right) \right)^2} \\ &= \frac{k_y x_0 - k_y x_1 + y_1 - y_0}{k_x - k_y} \sqrt{1 + k_x^2} \end{aligned}$$

5. Souřadnice y' je stejná jako $|YO'|$

$$\begin{aligned}
|YO'| &= \sqrt{(x_Y - x_0)^2 + (y_Y - y_0)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{k_x x_1 - k_x x_0 + y_0 - y_1}{k_x - k_y}\right)^2 + \left(k_y \left(\frac{k_x x_1 - k_x x_0 + y_0 - y_1}{k_x - k_y}\right)\right)^2} \\
&= \frac{k_x x_1 - k_x x_0 + y_0 - y_1}{k_x - k_y} \sqrt{1 + k_y^2}
\end{aligned}$$

6. Výsledný vztah lze zapsat ve vektorové formě – položme $\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}' &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_y x_0 - k_y x + y - y_0}{k_x - k_y} \sqrt{1 + k_x^2} \\ \frac{k_x x - k_x x_0 + y_0 - y}{k_x - k_y} \sqrt{1 + k_y^2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{k_x - k_y} \begin{pmatrix} \sqrt{1 + k_x^2} \\ \sqrt{1 + k_y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -k_y (x - x_0) + (y - y_0) \\ k_x (x - x_0) - (y - y_0) \end{pmatrix} \\
&= \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{k_x - k_y} \begin{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -k_y \\ 1 \end{pmatrix} \sqrt{1 + k_x^2} \\ \cdot \begin{pmatrix} k_x \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{1 + k_y^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Na zápis výše neberte vůbec ohled, správný výsledek je na prvním řádku. Při zacházení s rozdílem $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ ho bereme jako konstantu (tj. vynásobíme každou složku následujícího vektoru tímto rozdílem).