Goniometrické a logaritmické funkce

Jakub Michálek

2. června 2006

Zadání

1. Je dána funkce $f(x) = \frac{cx}{2x+3}$. Určete hodnotu koeficientu c tak, aby funkce byla sama sobě infersní. Co by mohl znamenat $f(f(x)) = x$?
2. Řeště rovnici $2^x(6-x) = 8x$ v $\mathbb{Z}$. Určete interval, ve kterém musí ležet kořeny.
3. Řeště $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.
4. V jakém nejdelším intervalu platí $\sin|x| = |\sin x|$? Zdůvodněte.
5. *Bonus*: Látka má na počátku m_0 částic. V čase t změříme m částic. Jaký je poločas rozpadu τ? Lze-li napsat závislost $m(t) = m_0 \exp(-kt)$, jaká bude hodnota konstanty k?

Řešení

1. Řešme úlohu jako rovnici.

$$\begin{aligned} 2xy + 3y &= cx \\ 2xy + 3y - cx &= 0 \end{aligned}$$

Vidíme, že v prvním členu vystupují x a y rovnoceně. Aby byla funkce sama sobě inversní, musí mít x i y zastoupené ve stejné formě. Jediná rovnice splňující tento požadavek je

$$2xy + 3y + 3x = 0$$

Odsud plyne $c = -3$. Tento způsob je elegantní, ale existuje ještě jeden vykukovský způsob. Funkce je zobrazení z definičního oboru do oboru hodnot. Má-li být funkce sobě inversní, musí být tyto stejné. Definiční obor funkce je zřejmě $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Vypočteme, kterých hodnot nebude funkce nikdy nabývat:

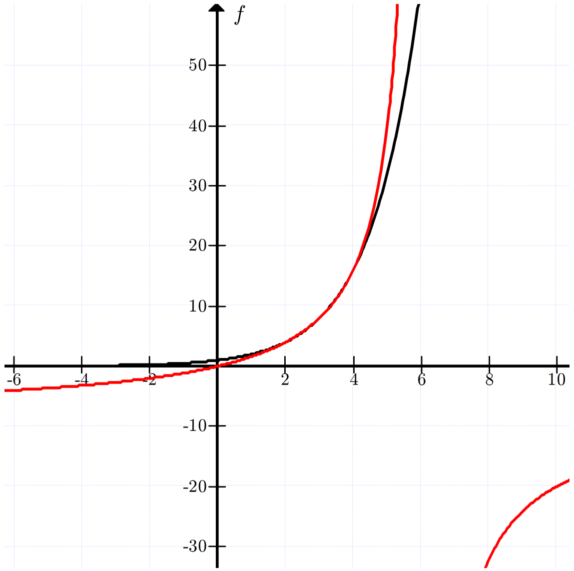
$$y = \frac{cx}{2x+3} = \frac{c}{2}\frac{cx}{cx+\frac{3}{2}c} = \frac{c}{2}\frac{cx+\frac{3}{2}c-\frac{3}{2}c}{cx+\frac{3}{2}c} = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{\frac{3}{2}c}{cx+\frac{3}{2}c}\right) = \frac{c}{2}\left(1 - \frac{3}{2x+3}\right)$$

Protože jmenovatel druhého zlomku je nenulový, je celý zlomek nenulový (je-li definován). Obor hodnot pak bude množina $\mathbb{R} - \left\{\frac{c}{2}\right\}$. Z výše uvedené rovnosti definičního oboru a oboru hodnot nutně plyne rovnost $\frac{c}{2} = -\frac{3}{2}$, tedy $c = -3$. Pro tuto funkci tedy platí $f^{-1}(x) = f(x)$. Zápis $f(f(x))$ lze nahradit $f\left(f^{-1}(x)\right)$, což už je z definice inversní funkce x.

2. Upravme rovnici na tvar. $2^x = \frac{8x}{6-x}$. Protože je levá strana kladná $\forall x$, musí být také pravá strana kladná (pro $x \in D_f$). To znamená

$$\begin{aligned} \frac{8x}{6-x} &> 0 \\ x(6-x) &> 0 \end{aligned}$$

Tato nerovnost má řešení $x \in (0, 6)$. Stačí tedy vyzkoušet pouze čísla $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dosazením do původní rovnice a porovnáním obou stran zjistíme, že vyhovují pouze kořeny $x \in \{2, 3, 4\}$.

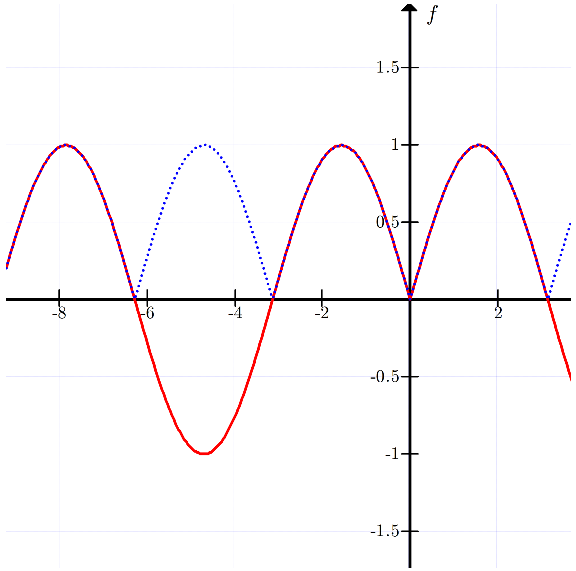


3. Upravme druhý člen podle vzorce a vykraťme dvěma

$$\begin{aligned}\sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x &= 1\\ \sin^2 x + 2\sin^2 x \cos^2 x &= \sin^2 x + \cos^2 x\\ \cos^2 x\left(2\sin^2 x - 1\right) &= 0\end{aligned}$$

Tomuto požadavku vyhovují pouze kořeny $\cos x = 0$, tedy $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, nebo $\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. To splňují pouze hodnoty $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$.

4. Bude-li $x < 0$, můžeme přepsat $\sin|x|$ jako $\sin x$ (osová souměrnost podle y). Na jiné případy nemá absolutní hodnota vliv. Bude-li $x < 0$, přepíšeme funkci $|\sin -|x|| = |-\sin|x|| = |\sin|x||$. Na záporném definičním oboru se budou schodovat pouze pokud je první funkce nezáporná (druhá funkce je z definice absolutní hodnoty vždy nezáporná). Ze souměrnosti podle osy y a periodicity funkce, stejně tak z toho, že funkce první je v prvním kvadrantu kladná, plyne, že nejdelší interval bude v okolí nuly. První funkce je kladná až do $x = \pi$. Odtud tedy plyne hledaný interval $x \in \langle -\pi, \pi\rangle$.



5. Funkce závislosti je $m(t) = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{\tau}}}$. Odtud vyjádříme hledaný poločas rozpadu

$$\begin{aligned}2^{\frac{t}{\tau}} &= \frac{m_0}{m}\\ \frac{t}{\tau}\ln 2 &= \ln\frac{m_0}{m}\\ \tau &= \frac{t\ln 2}{\ln\frac{m_0}{m}}\end{aligned}$$

Jenom přepíšeme jinak funkci $m(t) = \frac{m_0}{2^{\frac{t}{\tau}}} = m_0 2^{-\frac{t}{\tau}} = m_0\exp\left(\ln 2^{-\frac{t}{\tau}}\right) = m_0\exp\left(-t\frac{\ln 2}{\tau}\right)$. Odtud přímo plyne $k = \frac{\ln 2}{\tau}$.