Důkaz věty „bac minus cab“

Jakub Michálek

18. května 2006

Tvrzení

$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})$, kde „$\cdot$“ značí skalární a „$\times$“ vektorový součin.

Důkaz

Důkaz provedeme rozepsáním do složek. Rozepišme součin v závorce na levé straně podle definice vektorového součinu.

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C} = (B_y C_z - B_z C_y, \quad B_z C_x - B_x C_z, \quad B_x C_y - B_y C_x)$$

Nyní spočteme celou levou stranu a upravíme.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= (A_x, A_y, A_z) \times (B_y C_z - B_z C_y, B_z C_x - B_x C_z, B_x C_y - B_y C_x) \\
&= \begin{pmatrix} A_y\,(B_x C_y - B_y C_x) - A_z\,(B_z C_x - B_x C_z) \\ A_z\,(B_y C_z - B_z C_y) - A_x\,(B_x C_y - B_y C_x) \\ A_x\,(B_z C_x - B_x C_z) - A_y\,(B_y C_z - B_z C_y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - A_y B_y C_x - A_z B_z C_x \\ A_z B_y C_z + A_x B_y C_x - A_z B_z C_y - A_x B_x C_y \\ A_x B_z C_x + A_y B_z C_y - A_x B_x C_z - A_y B_y C_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_x\,(A_y C_y + A_z C_z) - C_x\,(A_y B_y + A_z B_z) \\ B_y\,(A_z C_z + A_x C_x) - C_y\,(A_z B_z + A_x B_x) \\ B_z\,(A_x C_x + A_y C_y) - C_z\,(A_x B_x + A_y B_y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Podobně také pravou stranu

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\,(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{B}\,(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - \boldsymbol{C}\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\
&= \begin{pmatrix} B_x\,(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \\ B_y\,(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \\ B_z\,(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_x\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ C_y\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \\ C_z\,(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_x A_x C_x + B_x A_y C_y + B_x A_z C_z \\ B_y A_x C_x + B_y A_y C_y + B_y A_z C_z \\ B_z A_x C_x + B_z A_y C_y + B_z A_z C_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} C_x A_x B_x + C_x A_y B_y + C_x A_z B_z \\ C_y A_x B_x + C_y A_y B_y + C_y A_z B_z \\ C_z A_x B_x + C_z A_y B_y + C_z A_z B_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_x A_y C_y + B_x A_z C_z - C_x A_y B_y - C_x A_z B_z \\ B_y A_x C_x + B_y A_z C_z - C_y A_x B_x - C_y A_z B_z \\ B_z A_x C_x + B_z A_y C_y - C_z A_x B_x - C_z A_y B_y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_x\,(A_y C_y + A_z C_z) - C_x\,(A_y B_y + A_z B_z) \\ B_y\,(A_z C_z + A_x C_x) - C_y\,(A_z B_z + A_x B_x) \\ B_z\,(A_x C_x + A_y C_y) - C_z\,(A_x B_x + A_y B_y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení věty dokázáno, neboť oba upravené výrazy se rovnají.