Důkaz zlatého řezu v pětiúhelníku

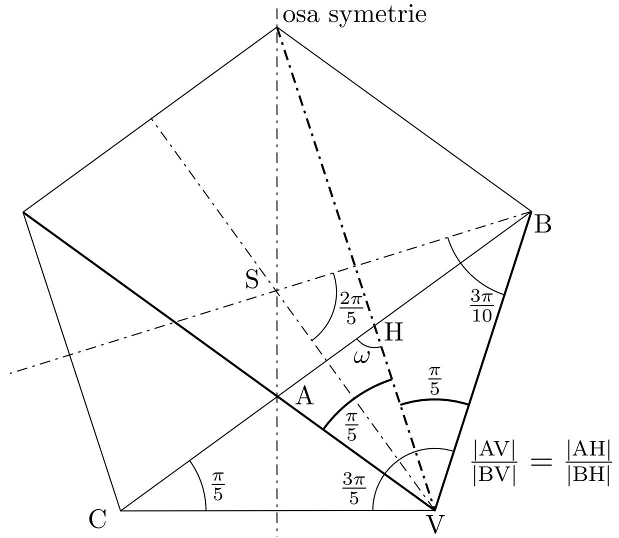
Jakub Michálek

10. května 2006

Samotný důkaz

Pokud si trojúhelník nakreslíme podle obrázku níže a vyznačíme symetrie (které plynou z definice, každý pravidelný mnohoúhelník má alespoň jednu osu symetrie), můžeme na jejich základě dopočítat některé důležité úhly v pětiúhelníku.

1. Středový úhel $|\sphericalangle \mathrm{VSB}| = \frac{2\pi}{5}$ bude zřejmě pětina celého úhlu (plyne ze symetrie).
2. Ze symetrie také plyne, že $\triangle\mathrm{VSB}$ je rovnoramenný. Z toho důvodu (a ze znalosti součtu úhlů v trojúhelníku) je velikost úhlu $|\sphericalangle \mathrm{SBV}| = \frac{\pi - \frac{2}{5}\pi}{2} = \frac{3\pi}{10}$.
3. Vnitřní úhel pětiúhelníku bude dvojnásobný $|\sphericalangle \mathrm{CVB}| = \frac{3\pi}{5}$.
4. Stejně jako v předchozím případě ze symetrie plyne rovnoramennost $\triangle\mathrm{VCB}$ a úhel $|\sphericalangle \mathrm{VCB}| = \frac{\pi - \frac{3}{5}\pi}{2} = \frac{\pi}{5}$.
5. Odtud plyne rovnost $|\sphericalangle \mathrm{CVA}| = |\sphericalangle \mathrm{AVH}| = |\sphericalangle \mathrm{HVB}|$ (odečtením stejně velkých úhlů $|\sphericalangle \mathrm{CVA}|$a $|\sphericalangle \mathrm{HVB}|$ od vnitřního úhlu pětiúhelníka $|\sphericalangle \mathrm{CVB}|$).
6. Dokázal jsem, že $\mapsto \mathrm{VH}$ je osa $\sphericalangle \mathrm{AVB}$.
7. Podle (L1) platí $\frac{|\mathrm{AV}|}{|\mathrm{BV}|} = \frac{|\mathrm{AH}|}{|\mathrm{BH}|}$. Z rovnosti (symetrie) pak také platí $|\mathrm{AV}| = |\mathrm{HB}|$ a z toho, že $\triangle\mathrm{VAB}$ je rovnoramenný (má dva stejné úhly, jak se dá jednoduše dopočíst), plyne $|\mathrm{BV}| = |\mathrm{AH}| + |\mathrm{HB}|$.
8. Výsledný vztah vypadá $\frac{|\mathrm{BH}|}{|\mathrm{AH}|+|\mathrm{BH}|} = \frac{|\mathrm{AH}|}{|\mathrm{BH}|} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, to je zřejmě definice zlatého řezu.



Jednoduchá tvrzení

Důkazy nejsou úplné, ale pro náš účel postačující (důkazy jsem sám vymyslel, protože jsem zapomněl původní).

L1 $\frac{|AV|}{|BV|} = \frac{|AH|}{|BH|}$

Důkaz: Podle sinové věty (L2) platí $\frac{\sin\omega}{|AV|} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{|AH|}$ a také $\frac{\sin(\pi-\omega)}{|BV|} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{|BH|}$. Přepsání těchto rovností dává $\frac{\sin\omega}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{|AV|}{|AH|}$, $\frac{\sin(\pi-\omega)}{\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{|BV|}{|BH|}$. Například ze sčítacího vzorce pro součet argumentů funkce sin (z grafu je jasné) platí $\sin(\pi-\omega) = \sin(\omega)$. Z rovnosti levých stran plyne tvrzení dokazované věty.

L2 Sinová věta

Mějme klasicky značený trojúhelník. Chceme dokázat $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$.
Důkaz: Ekvivalentní rovnost $b\sin\alpha = a\sin\beta$. Obě strany zřejmě vyjadřují velikost výšky na stranu c, musí tedy být stejné, čímž je tato rovnost dokázána.