Příprava na nebevzetí – řešení

Jakub Michálek

květen 2006

Děkuji Heleně Munzarové za pečlivou kontrolu a přínosné poznámky.

1. **Standardní otázky**

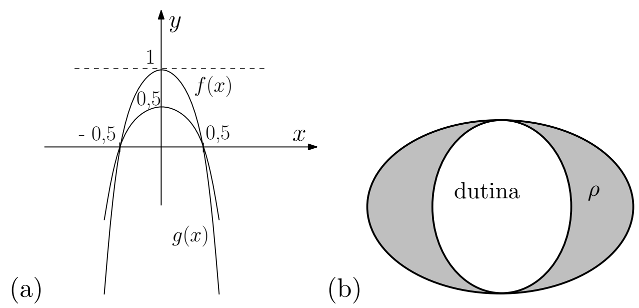
   (a) Křivky mají v řezu tvar paraboly (jedná se o definici), viz obr. 1. Průřez tělesa bude dvojnásobek rozdílu ploch. Rovnice obou křivek jsou

$$\begin{aligned} f(x) &= -4(x-0,5)(x+0,5) = \left(1-4x^2\right) \boldsymbol{a} \\ g(x) &= -2(x-0,5)(x+0,5) = \left(0,5-2x^2\right) \boldsymbol{a} \end{aligned}$$

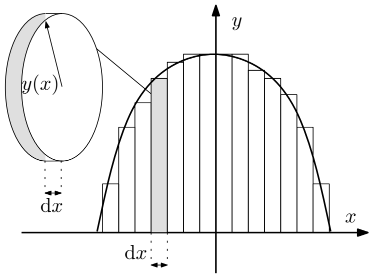
   Průřez bude dvojnásobek rozdílu ploch

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{-0,5}^{0,5} f(x)-g(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-0,5}^{0,5} 1-4x^2-0,5+2x^2\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-0,5}^{0,5} 0,5-2x^2\mathrm{d}x = 2\left[0,5x-\frac{2}{3}x^3\right]_{-0,5}^{0,5} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a}^2 \end{aligned}$$

   (b) K pochopení celého výpočtu nejlépe poslouží obr. 2. Celé těleso rozřežeme na malé, stejně tenké plátky (dx značí nekonečně malý, avšak



Obrázek 1: (a) Konstrukce parabolami, (b) řez tělesem (ve skutečnosti jsou úzká místa ostrá).



Obrázek 2: Ilustrativní rozřezání parabolického tělesa na malé válečky.

nikoli nulový, kousek x). Plátek má tvar válce s poloměrem podstavy $y(x)$ a s výškou $\mathrm{d}x$. Objem takového válce je $\mathrm{d}V = \pi y^2(x)\,\mathrm{d}x$, proto je hmotnost $\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V = \rho\pi y^2(x)\,\mathrm{d}x$. Objem tělesa pak bude rozdíl objemu vnějšího a vnitřního

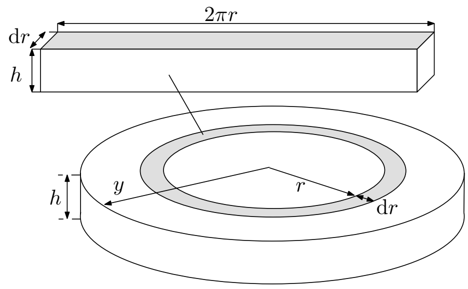
$$
\begin{aligned}
f^2(x) &= \left(1-4x^2\right)^2 = 1-8x^2+16x^4 \\
g^2(x) &= \left(0,5-2x^2\right)^2 = \frac{1}{4}-2x^2+4x^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= \int \mathrm{d}V = \int_{-0,5}^{0,5} \pi\left(y^2(x)-g^2(x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_{-0,5}^{0,5}\left(1-8x^2+16x^4-\frac{1}{4}+2x^2-4x^4\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\int_{-0,5}^{0,5}\left(12x^4-6x^2+\frac{3}{4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \pi\left[\frac{12}{5}x^5-2x^3+\frac{3}{4}x\right]_{-0,5}^{0,5} = \frac{2\pi}{5}\boldsymbol{a}^3 \\
m &= \rho V = \frac{2\pi\rho}{5}\boldsymbol{a}^3
\end{aligned}
$$

(c) Nejprve vypočteme, jak vypadá moment setrvačnosti nějakého disku. Pokud má disk poloměr y a hmotnost m, tak na kružnici ve vzdálenosti r připadá hmotnost $\mathrm{d}m = 2\sigma\pi r\mathrm{d}r$, kde σ je plošná hustota daného kruhu definovaná $\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{\pi R^2}$. Moment setrvačnosti takové kružnice je pak $J_{\mathrm{kr}} = \mathrm{d}mr^2 = \frac{2\pi r^3}{\pi R^2}m\mathrm{d}r$. Součet momentů všech kružnic pak bude moment disku

$$
J = \int_0^R \frac{2\pi r^3}{\pi R^2}m\mathrm{d}r = \frac{m}{R^2}\int_0^R 2r^3\mathrm{d}r = \frac{m}{R^2}\left[\frac{2}{4}r^4\right]_0^R = \frac{mR^2}{2}.
$$

Nyní už víme, jak vypočítat moment setrvačnosti válce. Příspěvek momentu setrvačnosti od jednoho takového válce s poloměrem y a



Obrázek 3: Disk.

hmotností $\mathrm{d}m$ je

$$\mathrm{d}J = \frac{1}{2}y^2\mathrm{d}m = \frac{\pi\rho}{2}y^4\left(x\right)\mathrm{d}x$$

Celkový moment bude rozdíl momentů tělesa kdyby nebylo duté a plného vnitřku[1]:

$$\begin{aligned} J &= \int \mathrm{d}J = \int \frac{\pi\rho}{2}y^4\left(x\right) - g^4\left(x\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi\rho}{2}\left[\frac{80}{3}x^9 + \frac{240}{7}x^7 - 5x^3 + \frac{15}{16}x\right]_{-0,5}^{0,5} = \frac{55\pi\rho}{336}\boldsymbol{a}^5 \end{aligned}$$

2. **Bonusové otázky**

   (a) Jak dlouhou stuhu bude potřebovat šéf Pentagonu, aby dárek zabalil (rovník + 2 poledníky).

   (b) Kolik bude potřebovat balicího papíru (jedna vrstva)?

   (c) Kolik směsi uranu obohaceného na n % bude potřeba, aby jaderná elektrárna (teplota vody venku T, teplota v primárním okruhu T_1) vyrobila elektrickou energii potřebnou k urychlení magického tělesa na úhlovou rychlost ω?

   (d) Napiš tensor setrvačnosti magického tělesa!

V řešení se vám mohou hodit následující vztahy.

$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x) - g(x)\mathrm{d}x$, objem tělesa vytvořeného rotující funkcí $V = \pi\int_{x_1}^{x_2} f^2(x)\mathrm{d}x$, $J = \lim_{m\to 0} mr^2 \Rightarrow J = \int r^2\mathrm{d}m$, délka křivky $l = \int\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$, $\int\sqrt{1+kx^2}\mathrm{d}x = \frac{x\sqrt{kx^2+1}}{2} + \frac{\operatorname{argsinh}\left(x\sqrt{k}\right)}{2\sqrt{k}}$, $\operatorname{argsinh}x = \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, účinnost, při které má stroj nejvyšší výkon $\eta = 1 - \sqrt{\frac{T}{T_1}}$, rotační energie $E = \frac{1}{2}J\omega^2$.

[1] Laskavý čtenář si úpravy provede rád sám, nebo užije programu, např. `http://integrals.wolfram.com`.