Derivace goniometrických funkcí

Jakub Michálek,
Tomáš Kučera

Shrnutí

Odvodí se základní vztahy pro derivace funkcí sinus a cosinus za pomoci věty o třech limitách, odvodí se také dvě důležité limity. Vypočítá se příklad s pohybem po kružnici a příklad s matematickým kyvadlem.

Věta o sevření limitami

Také známá jako věta o třech limitách.

Věta: $f_1, f_2, f_3 : \forall$
$x \in \mathbb{R} : f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)$
$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_3(x) \Rightarrow$
$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \lim_{x \to x_0} f_2(x)$.

Úkol: slovně přeformulujte a zdůvodněte.

Definice funkcí sinus a cosinus

Definice: Existuje právě jedna dvojice funkcí, která má následující vlastnosti (označíme je $\sin x$ a $\cos x$):

$\exists!\ (\sin x,\ \cos x)$:

1. $\forall x \in \mathbb{R}:\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}:\ \sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$

3. $\forall x, y \in \mathbb{R}: \ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

4. $0 < x \cos x < \sin x < x$ pro $0 < x < 1$

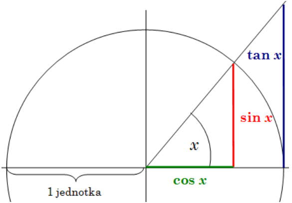
Dá se dokázat, že dané vztahy splňuje právě jedna dvojice funkcí $\sin x$ a $\cos x$ definovaných tak, jak je známe z jednotkové kružnice.

Měření úhlů

Úhly se měří v radiánech. Celý úhel ($360°$) má velikost 2π: platí totiž, že úhel je vyjadřován délkou oblouku, který vyseknou ramena úhlu na jednotkové kružnici (kružnice s poloměrem 1 jednotka).

Jednotková kružnice

Na následujícím obrázku jsou zachyceny důležité goniometrické funkce:



Toto znázornění využívá toho, že dle obvyklé definice (protilehlá ku přeponě atd.) je ve jmenovateli zlomku jednička.

Důkaz derivace sinu

Budeme vycházet z definice derivace:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{y\left(x+h\right) - y\left(x\right)}{h}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

Součet argumentů rozepíšeme podle vlastnosti funkce sinus z definice:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h} =$$

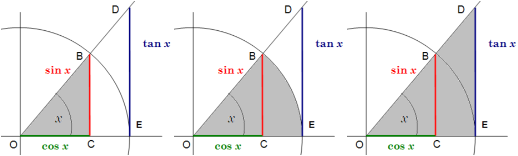
$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\,(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \sin h}{h} =$$

$$= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

Nyní pouze zbývá vyšetřit, k čemu se blíží výrazy $\frac{\cos h - 1}{h}$ a $\frac{\sin h}{h}$ pro h jdoucí k nule.

Úvaha s trojúhelníky

Představme si jednotkovou kružnici na obrázku níže.



Zřejmě bude platit pro velikost obsahů:

$$S_{OCB} \leq S_{OEB} \leq S_{OED}$$

Pro jednotlivé obsahy trojúhelníků bude platit (vypočítáme podle vzorce pro obsah trojúhelníku):

$$S_{OCB} = \frac{\cos x \sin x}{2}$$

$$S_{OED} = \frac{1 \tan x}{2} = \frac{\sin x}{2 \cos x}$$

U oblouku s výhodou použijeme trojčlenku:

- úhel 2π znamená celý obsah kruhu, tedy (pro poloměr 1 jednotka) $\pi r^2 = \pi$
- úhlu x tedy musí připadat obsah $\frac{x}{2}$

Dosazení:

$$\frac{\cos x \sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2 \cos x}$$

Upravujme tuto nerovnost ekvivalentními úpravami:

$$\cos x \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

Nyní všechny části nerovnosti převrátíme, musíme tedy otočit znaménka nerovnosti.

$$\frac{1}{\cos x} \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x$$

Zapíšeme jako limity:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq \lim_{x \to 0} \cos x$$

Jak známo, má-li funkce v nějakém bodě funkční hodnotu, pak limita v tomto bodě je rovna právě této funkční hodnotě. Protože platí $\cos 0 = 1$, zjednoduší se tato nerovnost na:

$$1 \geq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \geq 1$$

Použijeme-li větu nahoře o třech limitách, dostáváme pro hledanou limitu

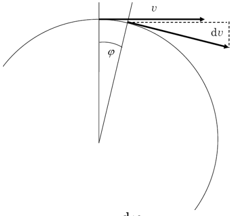
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Fyzikální zvyklosti

Je zvykem označovat derivaci podle času tečkou nad danou veličinou. Platí vztahy pro běžné veličiny:

- rychlost je změna polohy za infinitezimální (nekonečně malý) čas, rychlost je tedy derivací času (píšu jako skalár, obecně je vektor): $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{s}$
- zrychlení je změna rychlosti za čas, proto derivace rychlosti (druhá derivace polohy) $v = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{s}$
- podobně budeme mít úhlovou rychlost $\dot{\varphi}$ a úhlové zrychlení $\ddot{\varphi}$

Úkol: Vypočtěte, čemu se rovná dostředivé zrychlení tělesa při pohybu po kružnici. (Využijte $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ a diagramu níže.)



Nápověda: $\omega = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \mathrm{d}\varphi = \omega \mathrm{d}t,\ a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t},\ v = \omega r.$

Nyní je třeba zjistit hodnotu druhé limity $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$. Zjistíme ji vhodným roznásobením:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\frac{\cos x+1}{\cos x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x\,(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\,(\cos x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+1}=1\cdot\frac{0}{2}=0$$

První limitu jsme dosadili z předchozího důkazu a druhou jsme zjistili dosazením. Z toho pro derivaci sinu vyplývá:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = 0\sin x + 1\cos x = \cos x$$

Derivace cosinu

Pokud známe derivaci sinu, jednoduše zjistíme derivaci cosinu:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x\right)$$

Vlastnosti matematického kyvadla

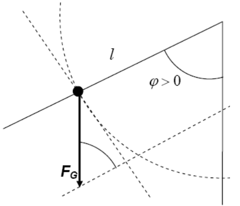
- Hmotný bod na nehmotné tyči.
- Má pouze jeden stupeň volnosti (k určení polohy závaží nám stačí znalost pouze jedné souřadnice).
- Používáme souřadnici φ, kyvadlo vykonává pouze malé kyvy, má jeden stupeň volnosti.

Druhý Newtonův zákon

Časová derivace hybnosti se rovná působící síle (derivace hmotnosti v závislosti na čase je v tomto případě nulová).

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}mv}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\ddot{s}$$

Hmotný bod na kyvadle má konstantní vzdálenost od středu l, pro kterou platí (tzv. *vazebná podmínka*) $\ddot{s} = l\ddot{\varphi}$



ÚKOL: Odvoďte pohybovou rovnici kuličky na kyvadle.

(Odpor prostředí zanedbejte, počítejte jen pro malé úhly, využijte tedy výše vypočtený vztah: $\lim_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1 \Rightarrow \lim_{\varphi \to 0} \sin \varphi = \varphi$.)

Všimněme si, že pokud je výchylka kladná, zrychlení bude záporné - síla totiž působí proti pohybu. Příslušná pohybová rovnice je tedy:

$$-mg\varphi = ml\ddot{\varphi} \Rightarrow \ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\varphi$$

Otázka tedy zní: Kterou funkci musíme dvakrát zderivovat, abychom dostali minus tu samou funkci?

Pochopitelně se jedná o funkci sinus, jejíž první derivace je cosinus a druhá derivace je minus sinus. Zbylé konstanty se dají jednoduše dopočítat. Řešení této rovnice je tedy:

$$\varphi = \varphi_0 \sin t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

φ_0 zde má význam amplitudy (maximální výchylky). Není těžké spočítat odvozenými pravidly zrychlení a rychlost v závislosti na čase. Protože perioda funkce sinus jsou 2π, bude perioda matematického kyvadla

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Kontrolní otázka: rychlost i zrychlení si vypočtěte, vše zakreslete do grafu a asi vás nic nepřekvapí…

Děkujeme za pozornost!

Tento dokument si můžete stáhnout z `http://jmi.czweb.org/derivace.html`.

Vytvořeno pomocí LyXu, MiKTEXu, Graph4, jež jsou všechny šířeny pod licencí GNU GPL (stejně jako tento dokument).