Derivace mocninných funkcí a exponenciály

Jakub Michálek
jmichalek@seznam.cz

Shrnutí

Odvodí se derivace mocninných funkcí a exponenciály.

Potřebné znalosti:

Binomická věta, definice derivace, základní pravidla pro práci s limitami, základní algebraické úpravy.

Derivace

Derivací funkce $y(x)$ podle x nazýváme výraz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y\left(x\right) = \lim_{h \to 0} \frac{y\left(x+h\right) - y\left(x\right)}{h}$$

Co je to mocninná funkce?

DEFINICE: Mocninná funkce n-tého stupně je funkce zadaná ve tvaru:

$y(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

Dále se budeme zabývat pouze jedním členem bez násobící konstanty.

Binomická věta

Derivaci vypočteme pomocí binomické věty:

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) x^{n-k} h^k = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array} \right) x^n +$$

$$\left(\begin{array}{c} n \\ 1 \end{array} \right) x^{n-1} h + \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) x^{n-2} h^2 + h^2 + \ldots + \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array} \right)$$

Kde

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Pak bude dle definice:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - \ldots}{h}$$

Rozdělíme na součet limit a všechny členy s $h > 1$ budou nulové (pro $h = 0$ se odečtou).

$$\lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h}{h} = nx^{n-1}$$

Získali jsme známý vzorec na derivaci mocninné funkce.

Eulerovo číslo

V baroku se přišlo na číslo, které má následující vlastnost:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \doteq 2,7182818284$$

My se nyní budeme zabývat funkcí

$$y = e^x = \exp(x)$$

Derivace exponenciály

Začneme zápisem z definice derivace.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x\left(e^h-1\right)}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{\left(e^h-1\right)}{h} =$$

Přepíšeme e jako limitu (dle definice).

$$= e^x\lim_{h\to 0}\frac{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nh}-1}{h} =$$

Zaměníme exponenty a využijeme pravidlo o derivaci mocninné funkce, ze kterého se dá odvodit $(1+h)^n = 1 + nh$ pro $h \ll 1$ [1]

$$= e^x \lim_{h\to 0} \frac{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{h}{n}\right)^n - 1}{h} =$$

Použijeme pravidlo ještě jednou, podíl $\frac{h}{n}$ bude jistě velmi blízký nule.

---

[1] Pro jistotu vysvětluji: dosadíme za $x = 1$ a máme $\lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^n - 1}{h} = n$, odkud již vynásobením h a přičtením jedničky daný vztah dostaneme.

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{\lim_{n\to\infty} 1 + h - 1}{h} =$$

$$= e^x \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = e^x$$

Čímž jsme dokázali, že derivováním exponenciály získáme opět exponenciálu.

Děkuji za pozornost!

Tento dokument si můžete stáhnout z `http://jmi.czweb.org/derivace.html`.

Vytvořeno pomocí LyXu, MiKTEXu, jež jsou oba šířeny pod licencí GNU GPL (stejně jako tento dokument).