Diskrétní metrický prostor

Juraj Hartman

11. dubna 2012

Definice Nechť P je množina. Na ní definujme metriku ρ následovně:

$$\rho(x, y) = 0, \text{ pokud } x = y,$$
$$\rho(x, y) = 1 \text{ jinak.}$$

ρ se potom nazývá *diskrétní metrika* a dvojice (P, ρ) *diskrétní metrický prostor*.

Důkaz, že ρ je metrika

Podmínky $\forall x, y \in P$ $\rho(x, y) \geq 0$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ a $\rho(x, y) = 0$ právě, když $x = y$, jsou zřejmě splněny.

Dokážeme platnost podmínky $\forall x, y, z \in P$ $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$. (*)

Nechť nejprve $x = y = z$. Potom $0 \leq 0$.

Nechť dále BÚNO $x = z \neq y$. Potom $0 \leq 2$.

Nechť dále BÚNO $x = y \neq z$. Potom $1 \leq 1$.

A nechť nakonec $x \neq y \neq z$ a $x \neq z$. Potom $1 \leq 2$.

Podmínka (*) je tudíž dokázaná. □

Vlastnosti

Lemma *Buď $G \subseteq P$. Potom G je uzavřená právě, když je $P \backslash G$ otevřená.*

Tvrzení 1 *Označme $B(y, r)$* otevřenou *kouli o poloměru r se středem v bodě y a $B'(y, r)$ uzavřenou kouli o poloměru r se středem v bodě y. Zvolme libovolně $x \in P$. Pak:*

$B(x, r) = \{x\}$ pro $r \in [0, 1]$,

$B'(x, r) = \{x\}$ pro $r \in [0, 1)$,

$B(x, r) = P$ pro $r \in (1, \infty)$,

$B'(x, r) = P$ pro $r \in [1, \infty)$.

Důkaz Zřejmé. □

Tvrzení 2 *Každá podmnožina diskrétního prostoru je omezená, otevřená a uzavřená.*

Důkaz Buď $G \subseteq P$. Protože $\forall x, y \in G$ je $\rho(x, y) \leq 1$, je i $\operatorname{diam}(G) \leq 1$, a G je omezená.

Nyní dokážeme otevřenost. Zvolme libovolně $x \in G$. Musí existovat otevřená koule $B(x, r)$ pro nějaké $r > 0$ tak, že $B(x, r) \subseteq G$. Podle Tvrzení 1 ovšem stačí vzít $B(x, r)$, kde $r \leq 1$, což je $\{x\}$.

Odtud plyne uzavřenost. $P \backslash G$ je také otevřená, a proto je podle lemmatu G uzavřená. □

Tvrzení 3 *Podmnožina diskrétního prostoru je sekvenciálně kompaktní (dále jen kompaktní) právě, když je konečná.*

Důkaz Buď $G \subseteq P$.

1. implikace: Nechť je G nekonečná. Potom v G existuje posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ prvků, z nichž se žádné dva sobě nerovnají. Pak žádné dva k sobě v diskrétní metrice nejsou blíž než 1, čili každá podposloupnost vybraná z $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemůže být Cauchyovská, tedy ani konvergentní. Tudíž G není kompaktní.

2. implikace (ta navíc platí pro podmnožinu libovolného metrického prostoru): Nechť je G konečná. Potom v každé nekonečné posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ si je zřejmě nekonečně mnoho jejích prvků rovno. Ty tvoří konstantní nekonečnou podposloupnost $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, která zřejmě konverguje, tudíž G je kompaktní. □

Tvrzení 4 *Ačkoli je každý diskrétní prostor omezený, právě každý nekonečně velký diskrétní prostor není totálně omezený.*
Důkaz Nechť je nekonečně velký diskrétní prostor P totálně omezený. Pak je pokryt konečným počtem libovolně malých otevřených koulí (o pevně zvoleném poloměru). Avšak protože podle Tvrzení 1 jsou otevřené koule o poloměru menším než 1 body, musí jich být nekonečně mnoho, aby pokryly P. Spor.
Konečně velký diskrétní prostor je zřejmě totálně omezený. □

Tvrzení 5 *Každá vlastní podmnožina diskrétního prostoru není hustá a ze všech jeho podmnožin pouze prázdná je řídká.*
Důkaz Dokážeme pouze neřídkost jiné, než prázdné množiny, druhé tvrzení plyne bezprostředně z definice hustoty. Buď $G \subseteq P$ řídká v P. Nechť $cls(G)$ značí uzávěr G. Pak podle Tvrzení 2 platí: $cls(P \setminus cls(G)) = cls(P \setminus G) = P \setminus G$. $P \setminus G = P$ však platí pouze, pokud je G prázdná. □

Tvrzení 6 *Diskrétní prostor je souvislý právě, když je jednobodový.*
Důkaz Je-li P jednobodový, je zřejmě souvislý. Nechť tedy dále P není jednobodový. Potom ho lze rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny. Podle Tvrzení 2 jsou obě tyto podmnožiny otevřené, tudíž P není souvislý. □