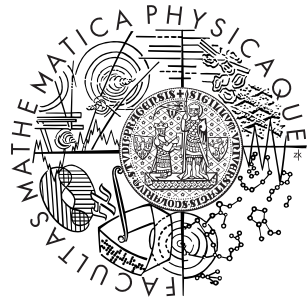


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Jakub Michálek

Konečnoprvková 2D formulace vibrací elastické struktury při velkých deformacích

Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Jaromír Horáček, DrSc.

Studijní program: Fyzika

Studijní obor: Obecná fyzika

Praha 2011

Na tomto místě bych chtěl poděkovat všem, kdo se podíleli na vzniku mé bakalářské práce. Zejména bych rád poděkoval vedoucímu Ing. Jaromíru Horáčkovi, DrSc., a konzultantům prof. RNDr. Zdeňku Martincovi, DrSc., a RNDr. Jakubu Velímskému, Ph.D., za rady při zpracování práce. Dále děkuji RNDr. Petře Maierové za seznámení s programem `Elmer` a katedře geofyziky, která mi dovolila si tuto (zdánlivě nesouvisející) práci zapsat.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, literatury a dalších odborných zdrojů. Souhlasím se zapůjčováním práce a jejím zveřejněním.

Beru na vědomí, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona, v platném znění, zejména skutečnost, že Univerzita Karlova v Praze má právo na uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona.

K tomuto dílu uděluji veřejnou licenci *Creative Commons Uvedte autora – Zachovejte licenci 3.0 Česko*. Pro zobrazení kopie této licence navštivte <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/cz/>.



V Praze dne 5. srpna 2011

Jakub Michálek

Název práce: Konečnoprvková 2D formulace vibrací elastické struktury při velkých deformacích

Autor: Jakub Michálek

Katedra: Katedra geofyziky

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Jaromír Horáček, DrSc. (Ústav termomechaniky Akademie věd České republiky)

E-mail vedoucího: jaromirh@it.cas.cz

Abstrakt: Práce se věnuje numerickému řešení pohybu hlasivky při velkých výchylkách, zatímco dosavadní práce uvažují zpravidla pouze malé výchylky. Uvažovaná geometrie hlasivky odpovídá nejjednodušší situaci fistule, kdy sledujeme jednu izolovanou hlasivku. Hlasivku uvažujeme obecně jako nelineární a neizotropní kontinuum ve 2D prostoru.

Pro demonstraci funkčnosti modelu pak numericky simulujeme chování hlasivky s lineární konstituční rovnicí. Hlasivku modelujeme metodou konečných prvků s kvadratickými prvky, a to při statickém a dynamickém zatížení povrchu. Ukazujeme, že pro simulaci deformace hlasivkové tkáně je třeba uvažovat rovnice s velkými výchylkami.

Numerickou simulaci hlasivky lze využít např. při konstrukci umělých hlasivek, a při optimalizaci jejich funkce. Porozumění fonačnímu mechanismu je rovněž podstatné pro zjištění příčin onemocnění jako jsou hlasové uzlíky a pro položení vědeckých základů pro foniatrii a pěveckou výuku. Práce je interdisciplinární a skládá dohromady poznatky z mechaniky kontinua, anatomie a pěvecké výuky.

Klíčová slova: Hlasivky, velké deformace, metoda konečných prvků

Title: Finite Element 2D Formulation of an Elastic Structure Vibration at Large Deformations

Author: Jakub Michálek

Department: Department of Geophysics

Supervisor: Ing. Jaromír Horáček, DrSc. (Institute of Thermomechanics of Academy of Sciences of the Czech Republic)

Supervisor's e-mail address: jaromirh@it.cas.cz

Abstract: The thesis addresses the numerical solution of the oscillation of the vocal fold at finite strain, whereas the literature has so far been concerned with infinitesimal strain only. The geometry concerned corresponds to the easiest situation of falsetto, since we observe an isolated vocal fold. The vocal fold is treated as non-linear and non-isotropic continuum in 2D space.

To demonstrate the function of the model, we simulate the behaviour of the vocal fold with the linear constitutive equation numerically. The vocal fold is modelled by the finite element method with quadratic elements for static and dynamic surface load. We show that a proper simulation of vocal fold tissue deformation requires the equations with finite strain term.

Numerical simulation of the vocal fold can be used e.g. for the construction of artificial vocal folds, and for the optimization of their function. Understanding the phonation mechanism is also essential for discovering the causes of the disorders such as the vocal nodules and for the scientific foundation of phoniatriy and education of singers. The thesis is interdisciplinary and synthetises the facts from mechanics of continuum, anatomy and education of singers.

Keywords: Vocal folds, finite strains, finite element method

Obsah

1 Úvod	8
1.1 Lidský hlas	8
1.2 Dosavadní zkoumání fonačního mechanismu	8
1.3 Hlasové rejstříky	10
1.4 Dvourozměrnost problému	10
2 Teorie	11
2.1 Kontinuum	11
2.2 Referenční oblast	12
2.3 Pohyb	12
2.4 Přejchod mezi bázemi	13
2.5 Materiální časová derivace	13
2.6 Reynoldsův teorém	14
2.7 Deformace kontinua	14
2.8 Tenzor rychlosti deformace	15
2.9 Tenzor napětí	15
2.9.1 Zákony zachování	15
2.10 Reologie	16
2.10.1 Konstituční rovnice	16
2.10.2 Lineární model	18
2.11 Shrnutí aplikovatelných rovnic	18
2.12 Slabé řešení a metoda konečných prvků	19
3 Numerická implementace	22
3.1 Schéma použitých programů	22
3.2 Parametry geometrie	23
3.3 Parametry triangulační sítě	23
3.4 Parametry materiálu	24

3.5	Pevná okrajová podmínka	24
3.6	Použité numerické metody	24
4	Výsledky	26
4.1	Statické zatížení hlasivky	26
4.2	Dynamické zatížení hlasivky	26
5	Diskuse	32
6	Závěr	34

Kapitola 1

Úvod

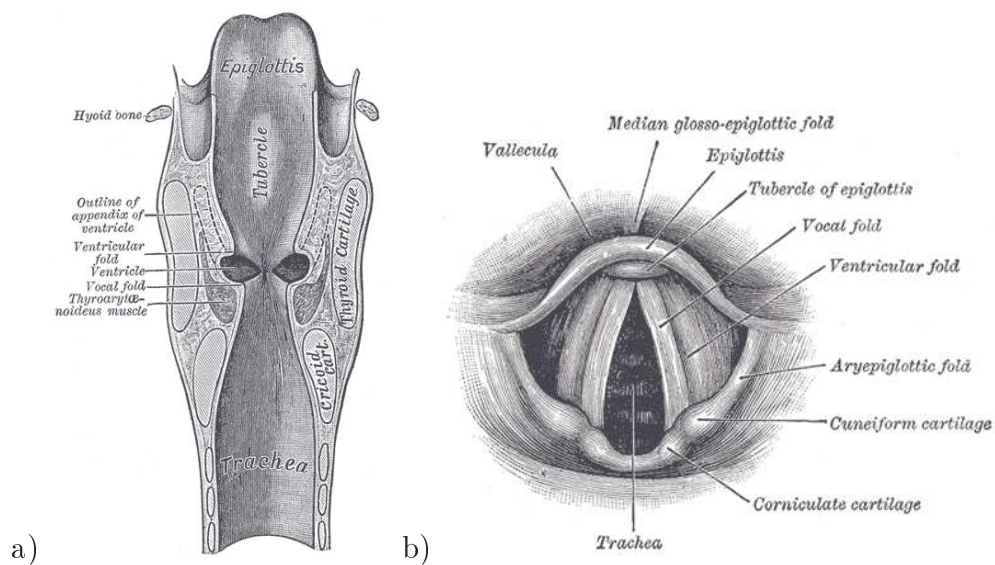
1.1 Lidský hlas

Lidský hlas je zvuk, který zpravidla vzniká v hrtanu a dále se mění díky rezonanci v dutinách a vlivu dalších částí lidského těla. Hlas vzniká, když proud vzduchu při průchodu hlasivkovou štěrbinou rozechvívá napjaté hlasivkové vazy. Hlasivkové vazy jsou párový orgán a je mezi nimi štěrbina (*glottis*).

Podstatou vzniku hlasu je tedy periodická interakce tekutiny (vzduchu) a struktury (hlasivek) [8]. Podle [19] způsobuje vzduch procházející mezi přiblíženými a napjatými hlasivkami při výdechu podtlak a za vhodných podmínek (subglottální tlak, vhodná šířka hlasivkové štěrbině, napětí) vede interakce tekutiny a struktury k oscilacím. Zdůrazňujeme, že oscilace vzniká přirozeně, nikoliv kvůli periodickým nervovým vzruchům. Anatomii hlasivek ukazuje obr. 1.1.

1.2 Dosavadní zkoumání fonačního mechanismu

Zatímco průchodu vzduchu hlasivkovou štěrbinou byla věnována značná pozornost, hlasivky jsou v modelech často reprezentovány pouze statickým tvarem (okrajovými podmínkami) jako v [19] nebo dynamickým systémem s nízkým počtem stupňů volnosti [17], případně jako pružné kontinuum s lineární elasticitou [16], zpravidla však pouze při malých výchylkách [11]. Ve skutečnosti se jedná o prostorový pohyb tkáně, která je napjatá a deformovaná. Vývoj modelování hlasových vazů při fonaci od jednoduchých systémů, kde hlasivka sestává z harmonického oscilátoru s jednou nebo dvěma hmotnostmi, až po numerické nelineární modely shrnuje [8]. Experimentálně fonaci zpracovali např. Horáček et al. v [7].



Obrázek 1.1: Anatomie hlasivek. a) Obrázek zobrazuje průřez hrtanem, zejména průdušnici, hlasové vazy a hrtanovou příklopku. Na obrázku je patrné, že část hlasivek je tvořena příčným svalem, který má jiné fyzikální vlastnosti než povrch hlasivky. Geometrii průřezu hlasivkou využívá i tato práce. b) Pohled ze shora ukazuje, že hlasivky jsou natahovány svaly (zde ve volné dýchací poloze) a že je lze přibližně aproximovat symetrií ve směru mezi úchytnými chrupavkami. Obrázky jsou kopie litografických destiček, který byly vydány v [6], a nepodléhají proto omezením na kopírování a šíření.

1.3 Hlasové rejstříky

Pro pochopení významu simulace pro tvorbu lidského hlasu je třeba vyložit základní fakta o takzvaných **pěveckých rejstřících**, které [18, s. 55] definuje jako řady tónů lidského hlasu s odstupňovanými vlastnostmi jak fyziologickými (způsob kmitání hlasivek, tvar hlasové štěrbiny), tak akustickými (zabarvení hlasu). Rozlišujeme rejstřík vocal fry, hrudní, hlavový, fistuli a superfalzet. Využití hlavového rejstříku a superfalzetu se většinou omezuje jen na pěveckou výchovu. [20]

Ačkoliv pojmenování těchto rejstříků vychází většinou z obvyklé rezonanční oblasti, přesnější rozlišení vychází ze způsobu kmitání hlasivek a mechanismu vzniku vzniku zvuku. V *hrudním* rejstříku kmitá hlasivka celou svojí masou, hlasivka se plně zavírá a obě hlasivky na sebe narážejí, což by bylo v numerickém modelu třeba zvlášť započítat (rázy). V *hlavovém* rejstříku kmitá pouze okrajová část hlasivek, které se plně zavírají. Variantou hlavového rejstříku je superfalzet (též parciální tón, angl. *whistle register*), při kterém se hlasivka částečně „zapne“ a kmitá pouze její malá část. [18, s. 54] Při dyšném tónu se hlasivky nedotýkají. Extrémním případem dyšného tónu je fistule (*falsetto*), při které se hlasová štěrbinu vůbec nezavírá.

Různé rejstříky používají různé mechanismy, a proto je motoricky složité mezi nimi plynule přecházet. Účelem pěvecké výchovy je vytvořit plynulý přechod mezi hrudním a hlavovým rejstříkem.

Z uvedené klasifikace vyplývá, že zkoumání izolované hlasivky (což je nejjednodušší případ) odpovídá fistuli a pro simulaci dalších typů hlasu je potřeba započítat numericky složité vlivy rázů apod.

1.4 Dvourozměrnost problému

Pro řešení je podstatné, že hlasivky se během fonace prodlužují řádově srovnatelně se svojí velikostí. Vzhledem k tomu, že tento problém řešíme pouze dvourozměrně, nemůžeme uvažovat napětí, které v hlasivkách vzniká ve směru kolmém na rovinu řešení. Na velikosti příčného napětí také závisí masa hlasivky, která kmitá, takže se od příčného napětí odvíjí také výška tónu.

Kapitola 2

Teorie

Značení fyzikálních veličin vychází vychází ze základního textu [9] a je shrnuto na konci této práce. Zejména pak používáme nepřesné označení stejným symbolem pro funkci polohy i indexu, majíce na zřeteli především fyzikální význam daný korespondencí $\mathbf{r} = \chi_t(\mathbf{x})$; srovnej odlišně [12].

Zvolené značení způsobuje problém, že neodlišuje operátor gradientu v materiálním a referenčním obrázku. Pokud není z předchozích vztahů patrné, že jde o gradient v materiálovém obrázku, píšeme explicitně $\nabla_{\mathbf{r}}$ (např. Reynoldsův teorém a důsledky). Pokud jde o materiály a definované tenzory, pak máme zpravidla na mysli gradient v referenčním obrázku.

Co se týče značení infinitezimálních veličin, přebírám intuitivní značení [21]. V tomto smyslu je třeba brát

$$d\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{S},$$

kde $d\mathbf{S}$ značí plošný element, přesněji jde o lineární formu dS představující diferenciál k povrchu $S(\mathbf{r}) = \text{konst.}$

Tenzory v této práci jsou většinou symetrické, a proto netřeba rozlišovat pořadí ve skalárním součinu. Stejně tak nerozlišujeme kovariantní a kontravariantní tenzory, protože pracujeme v Eukleidově prostoru. Pokud v tenzorové rovnici vystupuje skalární člen, rozumí se, že jde o skalární násobek identického tenzoru.

2.1 Kontinuum

Základní poznatky o mechanice kontinua shrnuje [9]. **Kontinuum** je model spojitého prostředí, které sestává z fyzikálně nekonečně malých částic, které hustě vyplňují referenční oblast. *Fyzikálně nekonečně malá částice* se realizuje jako částice mnohem

menší než rozlišovací schopnost měřícího přístroje, leč větší než jednotlivé molekuly materiálu. Měření *fyzikálně nekonečně malých časových intervalů* přitom probíhá po čas kratší, než se projeví makroskopické změny, ale v čase mnohem delší než je vibrační perioda molekul materiálu. [9, s. 156]

Kontinuum je matematická abstrakce uspořádání fyzikálně nekonečně malých částic a jejich pohybu ve fyzikálně nekonečně malých časech tak, aby byly dobře definovány limitní procesy $\Delta \mathbf{x} \rightarrow 0$ a $\Delta t \rightarrow 0$ (jako v matematické analýze v \mathbb{R}^n).

2.2 Referenční oblast

V souladu s popisem [12] uvažujme těleso, které zabírá omezenou oblast $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ s hranicí $\Gamma = \partial\Omega$. Tuto oblast, která nemusí mít nutně názorný fyzikální význam, nazýváme referenční oblast. (V této práci však bude mít význam polohy před deformací, což je v případě počátečního klidného stavu standardní volba.)

Podobně, jako jsme skupinu bodů označovali přirozeným indexem $i \in \mathbb{N}$, označujeme u kontinua body spojitým indexem $\mathbf{x} \in \Omega$.

2.3 Pohyb

S časem se působením sil mění rozložení hmoty tělesa a oblast, kterou v prostoru zabírá. Částice s pevným indexem se v čase pohybuje. Zobrazení referenční oblasti, které indexu přiřazuje polohu v prostoru ve zvoleném čase t , značíme

$$\begin{aligned} \chi_t : \Omega &\rightarrow \Omega_t \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{r}. \end{aligned}$$

Díky této konstrukci tvoří χ_t pro $t \in \mathbb{R}$ komutativní grupu a splňuje

1. spojitost,
2. $\chi_0 = 1$,
3. $\chi_{t+t'} = \chi_t \circ \chi_{t'}$.

2.4 Přechod mezi bázemi

Uvažujme nyní obrazy vektorů duální báze $\chi_t(\mathbf{d}x_i)$.

$$\mathbf{d}r_i = \nabla \mathbf{r} \cdot \mathbf{d}x,$$

kde jsme zavedli **deformační gradient** $\mathbf{F} = (\nabla \mathbf{r})^\top$, který je lineárním zobrazením z referenčního do materiálového obrázku (dvoubodový tenzor). Rovnoběžnostěn $\mathbf{d}x^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^N$ se tedy zobrazil na

$$\mathbf{d}r^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}r^N.$$

Definujeme relativní změnu objemu $J = \det \mathbf{F}$. Relativní změna objemu pak často bude vystupovat ve vztazích s objemovými integrály při přechodu mezi obrázky. Rovnoběžnostěn nesmí zobrazením χ_t degenerovat do nižší dimenze, odkud vyplývá s ohledem na vlastnosti zobrazení χ_t podmínka $J > 0$.

Matematická poznámka (srovnej obdobně [10]): Označme $D = \det \{a_{ij}\}$ a $D_{ij} = \frac{\partial D}{\partial a_{ij}}$. Z multilinearity determinantu a nulovosti při stejných řádcích platí Jakobiho formule

$$\sum_k D_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} D \Rightarrow D_{im} = a_{mi}^{-1} D, \quad (2.1)$$

kde a_{mi}^{-1} značí mi -tý prvek matice inverzní k $\{a_{ij}\}$.

Podle předchozí matematické poznámky (2.1) dostaneme pro deformační gradient

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{F}} = J \mathbf{F}^{-\top}. \quad (2.2)$$

2.5 Materiální časová derivace

Materiální časová derivace je časová derivace, při které se nemění index částice \mathbf{x} . Tato časová derivace vystupuje přímo ve fyzikálních zákonech, a proto je nutné ji dát do vztahu s derivací v referenční konfiguraci, kde probíhá výpočet. Jak uvádí [12, s. 24]

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \Big|_{\mathbf{x}} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} & \text{Lagrange} \\ \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{r}} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} & \text{Euler,} \end{cases}$$

kde \mathbf{v} značí rychlost pohybu a $\nabla_{\mathbf{r}}$ značí operátor gradientu v materiálovém obrázku. V této práci studujeme chování pevné látky, takže používáme vesměs Lagrangeův pohled.¹

Nyní spočteme materiální časovou derivaci Jakobiánu

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{\partial J}{\partial F_{ij}} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \stackrel{(2.2)}{=} J \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.3)$$

2.6 Reynoldsův teorém

Pro převod materiální časové derivace se používá Reynoldsův teorém

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \varphi dV \stackrel{(2.3)}{=} \int_{\Omega_t} \left[\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v} \right] dV \quad (2.4)$$

2.7 Deformace kontinua

Působením sil se částice s původní polohou \mathbf{x} (kterou jsme použili i pro značení indexu) dostane v čase t do nové polohy $\mathbf{r} = \chi_t(\mathbf{x})$. Kvantitativním vyjádřením deformace v malém okolí pevné částice \mathbf{x} je tenzor deformace.

Zavedeme **vektor posunutí** vztahem

$$\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{x}.$$

Nechť v bodě \mathbf{x} je posunutí \mathbf{u} ; v malém okolí tohoto bodu se posunutí mění diferencovatelně a pro blízký bod $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ lze psát

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \nabla\mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{x}.$$

Podle [9, s. 159] a [22, s. 130] je pak (Greenův) **tenzor deformace** $\boldsymbol{\varepsilon}$ v uvažovaném bodě \mathbf{x} kvadratická forma, která vektoru $\Delta\mathbf{x}$ přiřazuje rozdíl kvadrátů vzdáleností bodů $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ a \mathbf{x} před pohybem a po něm:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}' - \mathbf{u} + \Delta\mathbf{x}\|^2 - \|\Delta\mathbf{x}\|^2 &= \|\nabla\mathbf{u} \cdot \Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\|^2 - \|\Delta\mathbf{x}\|^2 \\ &= \Delta\mathbf{x} \cdot \left[(\nabla\mathbf{u} + 1)(\nabla\mathbf{u} + 1)^\top - 1 \right] \cdot (\Delta\mathbf{x})^\top \\ &= 2\Delta\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\Delta\mathbf{x})^\top, \end{aligned}$$

¹Eulerův pohled se používá pro tekutinu, takže by byl vhodný pro popis vzduchu, který hlasivku obtéká. Přitom se používá tzv. ALE metoda, která zohledňuje pohybující se hranici. [1]

kde

$$2\varepsilon = \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top + \left\{ \nabla \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^\top \right\}. \quad (2.5)$$

Člen ve složených závorkách odpovídá právě velkým deformacím, které v této práci uvažujeme. (Obvykle se tento člen zanedbává a pak se mluví o malých deformacích.) Tensor deformace je zjevně symetrický.

Kvadratickou formu tenzoru deformace můžeme vyjádřit rovněž pomocí Cauchyho deformačního tenzoru $\mathbf{C} = \|\mathbf{F}\|$. Obdobným postupem jako výše dostaneme

$$2\varepsilon = \mathbf{C} - 1. \quad (2.6)$$

2.8 Tensor rychlosti deformace

Tensor rychlosti deformace vystupuje v zákonu zachování energie (tab. 2.1) a v některých reologických vztazích, především u tekutin. Tensor rychlosti deformace $\boldsymbol{\eta}$ definujeme pomocí tenzoru deformace

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (2.7)$$

2.9 Tensor napětí

Tensor napětí $\boldsymbol{\tau}$ zavedeme vztahem

$$d\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.8)$$

Jde tedy o lineární zobrazení, které normálově orientované plošce $d\mathbf{S}$ přiřadí povrchovou sílu $d\mathbf{t}$. Existenci limity $\boldsymbol{\tau}$ pro $d\mathbf{S} \rightarrow 0$ postulujeme [12, s. 35].

2.9.1 Zákony zachování

Pomocí tenzoru napětí už můžeme formulovat všechny zákony zachování (tab. 2.1). Symetrie prostoru vůči operacím prostorové translace, prostorové rotace, časové translace implikují po řadě zákony zachování hybnosti, momentu hybnosti a energie. V nerelativistickém přiblížení platí i zákon zachování hmotnosti.

Abstraktně řečeno, zachovávaná se veličinu \mathbf{V} lze napsat jako integrál z jisté funkce a materiálová časová derivace tohoto integrálu musí vymizet. Pomocí Reynoldsova teorému (2.4) převedeme rovnice v integrálním tvaru do diferenciálního

Invariant	Integrální tvar	Diferenciální tvar
Hmotnost $m = \int \rho \, dV$	$\frac{dm}{dt} = 0$	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
Hybnost $\mathbf{p} = \int \rho \mathbf{v} \, dV$	$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \oint \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{S} + \int \rho \mathbf{f} \, dV$	$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
Moment hybnosti $\mathbf{L} = \int \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dV$	$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \oint \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{S} + \int \rho \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV$	$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$
Energie $\mathcal{K} + \mathcal{E} = \int \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + e \right) \rho \, dV$	$\frac{d(\mathcal{K} + \mathcal{E})}{dt} = \oint (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}) \cdot d\mathbf{S} + \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} \, dV$	$\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} - \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho \frac{de}{dt}$

Tabulka 2.1: Zákony zachování v materiálním obrázku podle [12, s. 41n] a [9, s. 187] (neuvažujeme vnitřní zdroje energie). Objemové integrály \int jsou přes objem Ω_t , povrchové integrály \oint jsou přes povrch $\Gamma_t = \partial\Omega_t$. Bilanční rovnice uvádím jednak v globálním tvaru, jednak v lokálním tvaru.

tvaru.

V případě hlasivek nebudeme uvažovat energetické zdroje a druhý termodynamický zákon, protože jejich vliv je zde zanedbatelný.

2.10 Reologie

2.10.1 Konstituční rovnice

Dosavadní rovnice nepostačují k obecnému řešení problému pohybu hlasivky jako kontinua pro deset neznámých, které jsou složkami neznámých polí ρ , \mathbf{u} a $\boldsymbol{\tau}$. Proto je nutné dodat další rovnice, které jsou specifické pro každý materiál (**konstituční rovnice**). Podle [12, s. 62] lze v našem případě zapsat nejobecněji konstituční rovnice jako funkcionál závislý na pohybu v celém předchozím čase (princip determinismu)

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{\substack{\mathbf{x}' \in \Omega \\ t' < t}} [\rho(\mathbf{x}', t'), \chi_{t'}(\mathbf{x}'), \mathbf{x}].$$

Pomocí principu lokální akce [12, s. 63] postulujeme pro jednoduché materiály, že ve funkcionálu hraje podstatnou roli pouze malé okolí bodu \mathbf{x}

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}', t') &\approx \rho(\mathbf{x}, t') + \nabla \rho(\mathbf{x}, t') \cdot \Delta \mathbf{x} \\ \chi_{t'}(\mathbf{x}') &\approx \chi_{t'}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t') \cdot \Delta \mathbf{x}, \end{aligned}$$

kde $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ a upozorňujeme na to, že funkcionál stále uvažujeme přes všechny

přechází časy. Pomocí dalších úvah, jako je vyjádřitelnost hustoty pomocí Jakobiánu transformace a tedy i pomocí \mathbf{F} dospějeme k obecnému (čistě mechanickému) výrazu

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{F}_{t' < t}[\mathbf{r}(t'), \mathbf{F}(\mathbf{x}, t'), \mathbf{x}].$$

Pomocí podmínek objektivit veličin při transformacích souřadnic a polárního rozkladu můžeme závislost zapsat v redukovaném tvaru [12, s. 67]

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{R} \mathcal{F}'_{t' < t}[\mathbf{C}(\mathbf{x}, t'), \mathbf{x}] \mathbf{R}^T,$$

kde $\mathbf{C} = \|\mathbf{F}\|$ značí Cauchyho deformační tenzor (2.6) a \mathbf{R} ortogonální tenzor v polárním rozkladu $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$.

Další podstatné zjednodušení přinášejí věty o reprezentaci; obecný postup [12, s. 87] budeme aplikovat na reologii hlasivky. Pokud máme tenzorovou funkci pouze jednoho tenzoru \mathbf{C} , která splňuje podmínku izotropie, lze odvodit, že obecná závislost musí vypadat

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{C}) = \mathbf{R} (a_0 + a_1 \mathbf{C} + a_2 \mathbf{C}^2) \mathbf{R}^T, \quad (2.9)$$

kde $a_i(I_l)$ jsou funkce invariantů tenzoru \mathbf{C} . Invarianty I_l tenzoru druhého řádu ve třech dimenzích jsou stopa, stopa čtverce a determinant, jak vyplývá z charakteristického polynomu:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{Tr } \mathbf{C} \\ I_2 &= \frac{1}{2} [(\text{Tr } \mathbf{C})^2 - \text{Tr } \mathbf{C}^2] \\ I_3 &= \det \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Výsledkem této sekce je obecná závislost (2.9), která musí být základem libovolné formulace konstitutivních rovnic pro materiál hlasivky, speciálně však bude základem nelineárních rovnic, které bude v dalším studiu hlasivky nutno využít. Použitelnost (2.9) je však poněkud limitována tím, že konkrétní tvar funkčních závislostí neznáme a je obtížné ho experimentálně změřit. Proto se z praktických důvodů používá lineární model, u kterého jsou fyzikální konstanty hlasivky změřeny. V konkrétním modelu může být uvažováno její složení například z několika vrstev s různými fyzikálními vlastnostmi (např. [11]).

Název	Lokální tvar rovnice
Lineární a izotropní materiál (2.10)	$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}$
Zákon síly (tab. 2.1)	$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f} = \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}$
Moment hybnosti (tab. 2.1)	$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$
Tenzor deformace (2.5)	$2\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T + \left\{ \nabla\mathbf{u} \cdot (\nabla\mathbf{u})^T \right\}$

Tabulka 2.2: Shrnutí matematických rovnic, které budeme využívat v případě numerické simulace hlasivky.

2.10.2 Lineární model

Jak ukazuje [12, s. 89], lineární model je nejjednodušším případem závislosti na tenzoru deformace. (V našem případě však uvažujeme velké deformace, které [12] pro jednoduchost neuvažuje.) Předpokládáme lineární závislost napětí na deformaci [2, s. 37]

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbb{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde \mathbb{C} je tenzor čtvrtého řádu v Hookově zákoně. Speciálně u izotropních materiálů lze psát

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (2.10)$$

kde μ a λ jsou Laméovy parametry, které vyjádříme pomocí Youngova modulu pružnosti E a Poissonova čísla ν

$$\lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.11)$$

První vztah platí podle [2, s. 38] pouze ve *dvourozměrném* případě.

Rozumí se, že ve výrazu (2.10) značí druhý člen na pravé straně násobek jednotkového tenzoru.

2.11 Shrnutí aplikovatelných rovnic

V tomto konkrétním případě uvažujeme zákony zachování ve tvaru uvedeném v tab. 2.2. Jak vyplývá z tabulky, vůbec neuvažujeme vnitřní energii materiálu (tedy ani tepelné toky apod.), která v případě hlasivky řešení příliš neovlivňuje. Velké kolísání teploty v oblasti hlasivek je nadto vyloučeno, protože by mohlo poškodit jejich tkáň. Hlasivky se v tom případě však mnohem dříve poškodí mechanickou deformací, takže další fonaci znemožní.

2.12 Slabé řešení a metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků je matematická metoda řešení parciálních diferenciálních rovnic, kdy referenční oblast rozdělíme triangulací na trojúhelníkové podoblasti, na kterých aproximujeme hledané funkce polynomy z prostoru \mathcal{P} , který upřesníme později. Tyto polynomy, které mají kompaktní nosič, nazýváme testovací funkce. Původní parciální diferenciální rovnici jsme původně zapsali v tzv. silné formulaci. Vynásobením testovací funkcí z prostoru \mathcal{P} a integrací přes referenční oblast Ω získáme slabou formulaci parciální diferenciální rovnice, kterou lze již převést na řešení soustavy rovnic.

Uvažujme statický případ metody konečných prvků, kdy v tab. 2.2 platí $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$. Dále předpokládejme malé výchylky, tj. v tab. 2.2 berme $\{\dots\} = 0$. V numerickém výpočtu se tento člen nejprve linearizuje, nicméně pro jednoduchost ho nebudeme uvažovat.

Dále budeme ve formulování slabé rovnice postupovat způsobem uvedeným v [5]. Nejprve dosadíme provedeme proceduru podle prvního odstavce u zákona síly

$$\int_{\Omega} [\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}] d^3\mathbf{x} = 0. \quad (2.12)$$

Uvažme přitom dva typy okrajových podmínek na hranici $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}_0 \quad \text{na } \Gamma_D \quad (\text{Dirichletova}) \\ \mathbf{t} &= \mathbf{t}_0 \quad \text{na } \Gamma_N \quad (\text{Neumannova}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

kde $\mathbf{t} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}$ značí vektor tlakové síly. Integrací (2.12) per-partes přepíšeme první člen

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) d^3\mathbf{x} = \boxed{\oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot d\mathbf{S} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} d^3\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d^3\mathbf{x}.}$$

Dosazením konstituční rovnice lineárního a izotropního materiálu získáme

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d^3\mathbf{x} + \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) dS = \int_{\Omega} \left[\mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \right] : \nabla \mathbf{v} d^3\mathbf{x}.$$

Uvažujeme-li pro konečně-rozměrný prostor matic libovolnou normu, můžeme definovat prostory

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{ \mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}\|, \|\nabla \mathbf{u}\| \in L^2(\Omega), \text{ platí (2.13)} \} \\ \mathcal{V} &= \{ \mathbf{v} \mid \|\mathbf{v}\|, \|\nabla \mathbf{v}\| \in L^2(\Omega), \mathbf{v} = 0 \text{ na } \Gamma_D \},\end{aligned}$$

což jsou podprostory Sobolevova prostoru $H^1(\Omega)$. Teď můžeme pro funkcionál

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \mu \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right) + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right] d^3 \mathbf{x}$$

zformulovat úlohu

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d^3 \mathbf{x} + \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_0) dS = \Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad (2.14)$$

kde jsme použili okrajové podmínky, vlastnosti prostorů a symetrizovali jsme člen s $\nabla \mathbf{v}$, který kontrahujeme se symetrickým tenzorem. Funkcionál $\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ je pro malé výchylky symetrický; pro velké výchylky by přibyl další člen, který tuto symetrii ruší. Tento člen se musí započítat zvlášť iterativními metodami. **Slabá formulace** úlohy znamená, že pokud pro všechna $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ platí rovnost (2.14), pak $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ je slabé řešení úlohy.

Těžištěm metody konečných prvků je podle [4, kap. 3, s. 10] hledání řešení úlohy (2.14) v konečně dimenzionálním podprostoru \mathcal{U} (Galerkinova metoda). Podobně vektory \mathbf{v} bereme pouze z konečně dimenzionálního podprostoru \mathcal{V} . Zpravidla se volí prostor polynomů k -tého stupně $\mathcal{P}^{(k)}$. Podle vlastností tohoto prostoru se rozlišují jednotlivé typy Galerkinovy metody, zejména lze každý konečný prvek rozdělit na menší podobné prvky a předsat rovnice pro tyto „vnitřní uzly“.

Oba vektory lze napsat jako lineární kombinace bázevých vektorů. Přitom máme volnost v tom, jaké bázevé funkce si zvolíme. [13, s. 45] například uvažuje spojité, po částech lineární funkce, které mají kompaktní nosič a existuje takový bod, že se v každém směru vycházejícím z tohoto bodu lineárně snižují do nuly (tvar „špičaté čepice“). Moje práce používá v numerické simulaci zejména kvadratické konečné prvky.

Dosažením tvaru lineární kombinace do úlohy (2.14) získáme matici tuhosti a vektor zatížení (podrobně např. [13, s. 37]). Výhoda volby funkcí ve tvaru špičaté čepice spočívá v tom, že výsledná matice tuhosti je řídká a vhodná pro numerické výpočty.

Vyřešením soustavy získáme i přibližné řešení úlohy (2.14). Vzhledem k tomu, že tento postup je v programu Elmer již automatizován, odkazujeme na podrobný popis

v učebnici [22], na text [4] nebo na zdrojový kód procedury `StressSolve`, o které bude řeč později. Jednotlivé typy konečných prvků, které program `Elmer` používá, shrnuje manuál [3, s. 105].

Kapitola 3

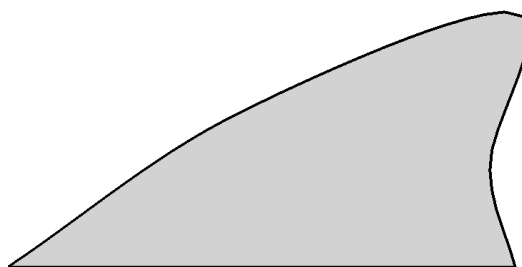
Numerická implementace

3.1 Schéma použitých programů

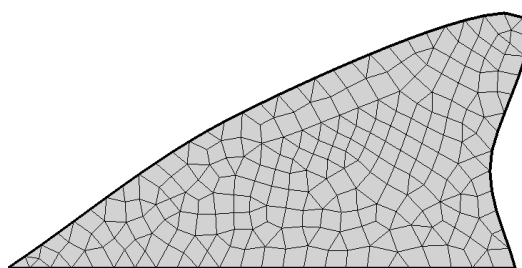
Vzhledem k provázanosti jednotlivých programů považuji za vhodné uvést schéma, podle něhož jsem získal numerické výsledky. Těžiště leží v programu **Elmer**, který provádí samotnou simulaci. Ostatní programy slouží k přípravě geometrie a sítě (tu je ve složitějších případech nutné upravit ručně), resp. grafickému zpracování výsledků.¹

- **Gmsh** – geometrie a síť
- **ElmerSolver** – numerická simulace
 - Fotranová funkce – složitější prostorová a časová závislost povrchových nebo objemových sil
 - Procedura na řešení rovnice:
 - * **StressSolve** – řešení při malých deformacích (2.5) nebo
 - * **ElasticSolve** – řešení při velkých deformacích (2.5)
- **ElmerPost** – grafické zpracování výstupu do obrázků
- **awk** – zpracování textových výstupů do vstupního formátu program **gnuplot**
- **gnuplot** – zpracování grafů časových závislostí

¹Všechny použité programy jsou svobodně dostupné za podmínek licence GNU GPL nebo pozdější.



Obrázek 3.1: Geometrie průřezu hlasivkou. Tvar jsem modeloval přibližně podle [19, 11]. (Přesný tvar není vzhledem k variacím u jednotlivých lidí a podrobnosti uvažovaného modelu rozhodující.) Hranice tělesa Γ_t je na obrázku vyznačena tučně a skládá se z dolní hranice, která je přímá pevná, a z horní hranice ve tvaru výduti, kde předpisujeme různé okrajové podmínky. Rozměry obrázku jsou popsány v sekci 3.2.



Obrázek 3.2: Triangulační síť vygenerovaná programem `gmsh` podle zadaných parametrů. Rozměry obrázku jsou popsány v sekci 3.2.

3.2 Parametry geometrie

Hlasivku v průřezu uvažujeme tak, že má šířku 5,0 mm a výšku 2,5 mm (podle [7]). Geometrie průřezu hlasivkou odpovídá dosud uvažovaným modelům (obr. 3.1).

3.3 Parametry triangulační sítě

Sít jsem vytvořil v programu `gmsh` a následně jsem ji konvertoval do vstupního formátu programu `ElmerSolver`. Přitom jsem musel manuálně zmenšit velikosti, aby odpovídaly předpokládaným rozměrům hlasivky podle předchozí podsekce. Parametry triangulační sítě shrnuje tab. 3.1 a samotnou síť zachycuje obr. 3.2.

Parametr	Počet
Počet uzlů	952
Počet 2D konečných prvků	261
Počet 1D konečných prvků	68
Počet uzlových prvků (101)	2
Počet kvadratických úsečkových prvků (203)	66
Počet kvadratických trojúhelníkových prvků (306)	82
Počet kvadratických čtyřúhelníkových prvků (409)	179

Tabulka 3.1: Parametry triangulační sítě. Používáme 4 různé typy konečných prvků.

Veličina	Hodnota
Hustota	$\rho = 1040 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Modul pružnosti	$E = 10 \text{ kPa}$
Poissonův poměr	$\sigma = 0,4$
Činitel tlumení	$D = 0,1$

Tabulka 3.2: Materiálové konstanty lineárního a izotropního modelu průřezu hlasivkové tkáně (podle [7]). Je třeba dodat, že přesná měření fyzikálních parametrů hlasivky nejsou k dispozici, protože závisí na fyzických dispozicích konkrétního člověka, způsobu využití (pěvecký hlas), hydrataci apod. Navíc hlasivka sama je tvořena několika vrstvami, které mají zásadně odlišné fyzikální vlastnosti, a předpoklad izotropie u jednotlivých vrstev rovněž není splněn.

3.4 Parametry materiálu

Materiál charakterizujeme v nejjednodušším případě jako lineární a izotropní podle (2.10). Příslušné materiálové konstanty shrnuje tab. 3.2.

3.5 Pevná okrajová podmínka

Pro dolní hranici hlasivky (obr. 3.1) uvažujeme ve všech případech okrajovou podmínku $\mathbf{u} = 0$, podle níž je materiál hlasivky pevně připojen ke tkáni a nevychyluje se. Okrajové podmínky pro volnou hranici jsou v dále uvažovaných případech vyloženy zvlášť. Objemové síly jako tíhovou sílu zanedbáváme.

3.6 Použité numerické metody

Numerická simulace vychází z metody BDF druhého řádu (konkrétní metoda však jde nastavit). Tato metoda je implementována přímo v programu `ElmerSolver` a je dobře zdokumentovaná. Metoda BDF využívá k výpočtu časových derivací hod-

noty v předchozích časových krocích. Podrobnosti lze v případě potřeby dohledat v literatuře [15], [14, s. 172]. Pro zahrnutí nelineárního členu u velkých deformací používá program **Elmer** iterativní metody. Tyto metody dokumentuje [3, s. 27] nebo lze nahlédnout přímo do zdrojového kódu.

Kapitola 4

Výsledky

Pro demonstraci funkčnosti numerického modelu hlasivky jsem vybral dva příklady, které ilustrují statické a dynamické zatížení hlasivky. V obou případech působíme na hlasivku silou ve *svislém* směru. **Působíště síly** se omezuje na malou oblast, která odpovídá oblasti uchycení při natahování. V našem případě síla působí rovnoměrně na povrchu hlasivky s vodorovnou souřadnicí mezi 4,1 mm až 4,7 mm.

4.1 Statické zatížení hlasivky

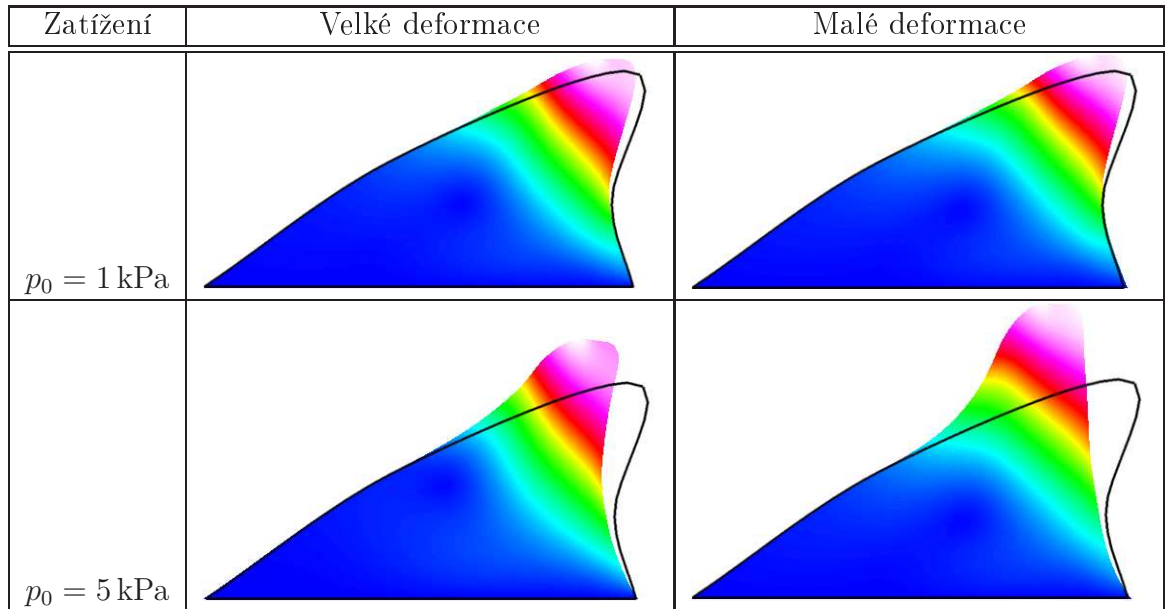
V případě statického zatížení má tlak vyvolaný zatížením v čase konstantní velikost p_0 a v rovnicích v tab. 2.2 platí $\frac{dv}{dt} = 0$. Simuloval jsem zatížení $p_0 = 1$ kPa, které způsobilo na hlasivce malé výchylky. Následně jsem simuloval zatížení $p_0 = 5$ kPa, které způsobilo na hlasivce velké výchylky. Účelem těchto simulací bylo ukázat, že v rovnici pro tenzor deformace (2.5) je nezbytné uvažovat i člen velkých deformací, pokud jde o napětí, která se mohou vyskytovat v hlasivce. Výsledky simulace statického zatížení hlasivky jsou shrnuty na obr. 4.1.

4.2 Dynamické zatížení hlasivky

V případě dynamického zatížení má tlak vyvolaný zatížením v čase harmonický průběh podle rovnice

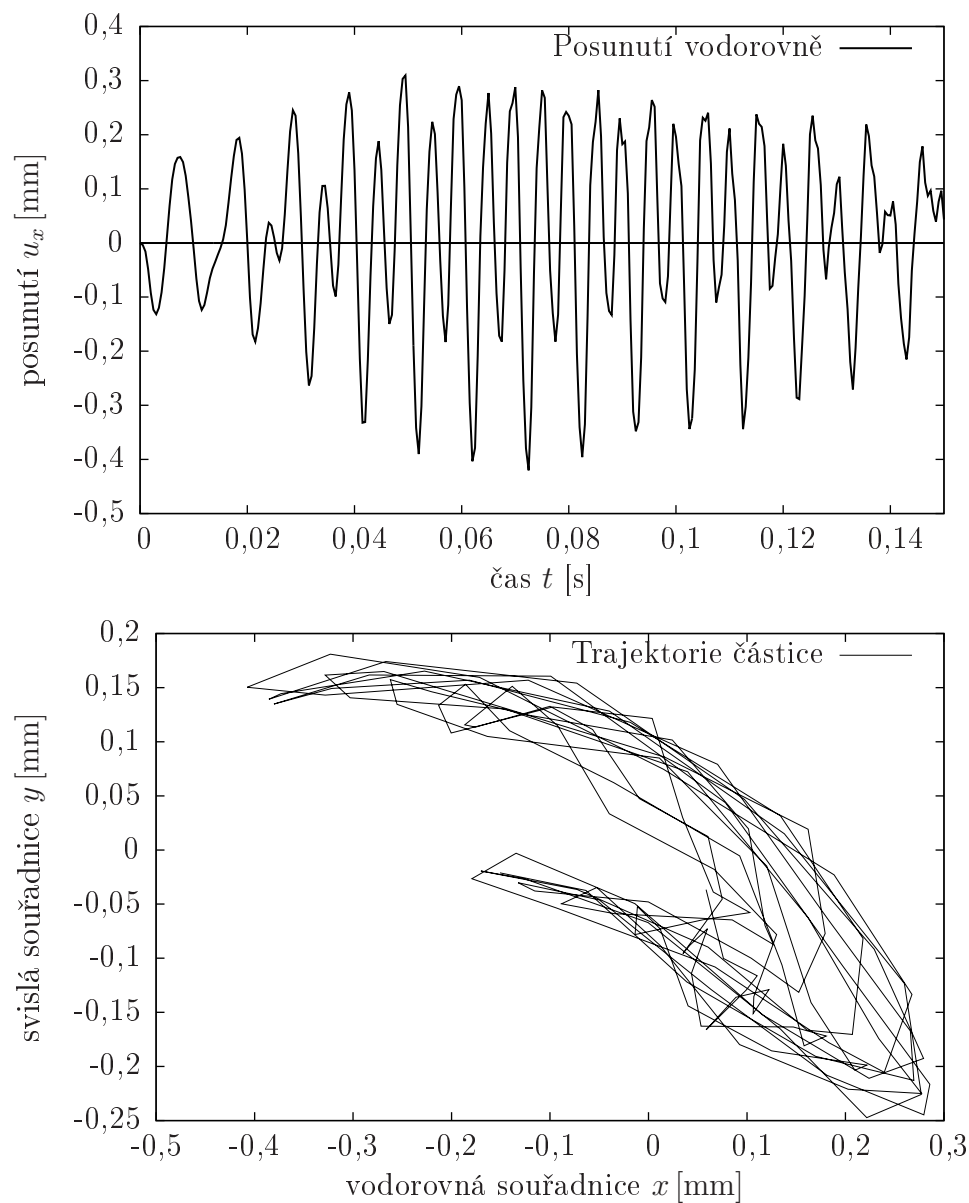
$$p(t) = p_0 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

kde $T = 0,01$ s značí periodu zatížení a $p_0 = 1$ kPa amplitudu tlaku. Uvažované periodě odpovídá frekvence 100 Hz; jde tedy přibližně o frekvenci mužského hlasu v hrudním rejstříku.

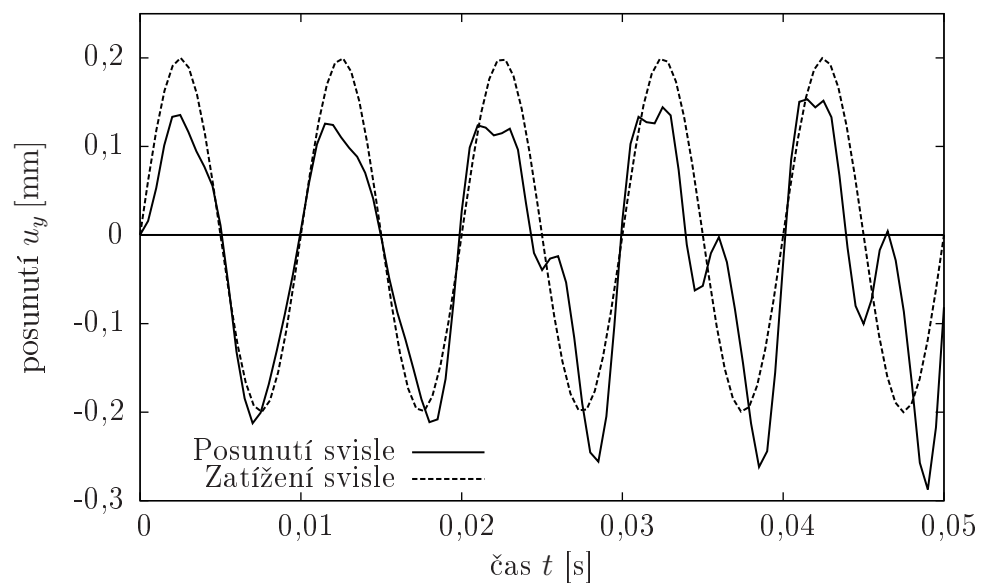
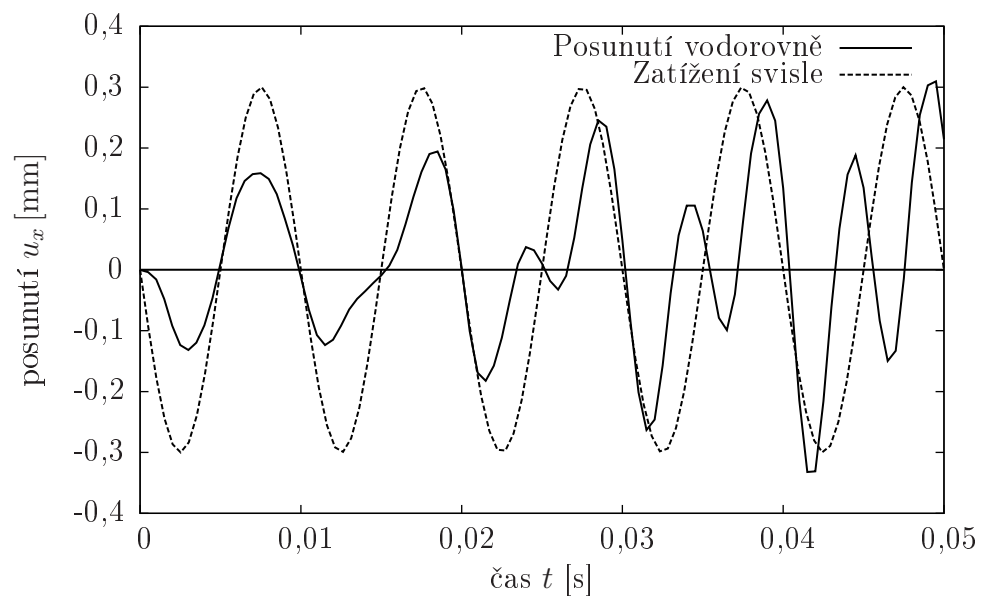


Obrázek 4.1: Statické zatížení hlasivky. Tabulka je rozdělena jednak na malé a velké deformace podle toho, zda je v rovnici (2.5) uvažován nelineární člen, jednak podle zatížení. Obrysová čára vymezuje hranici tělesa v nezatíženém stavu. Barva obrázku kvalitativně vyjadřuje velikost posunutí u . Rozměry obrázku jsou popsány v sekci 3.2 na straně 23.

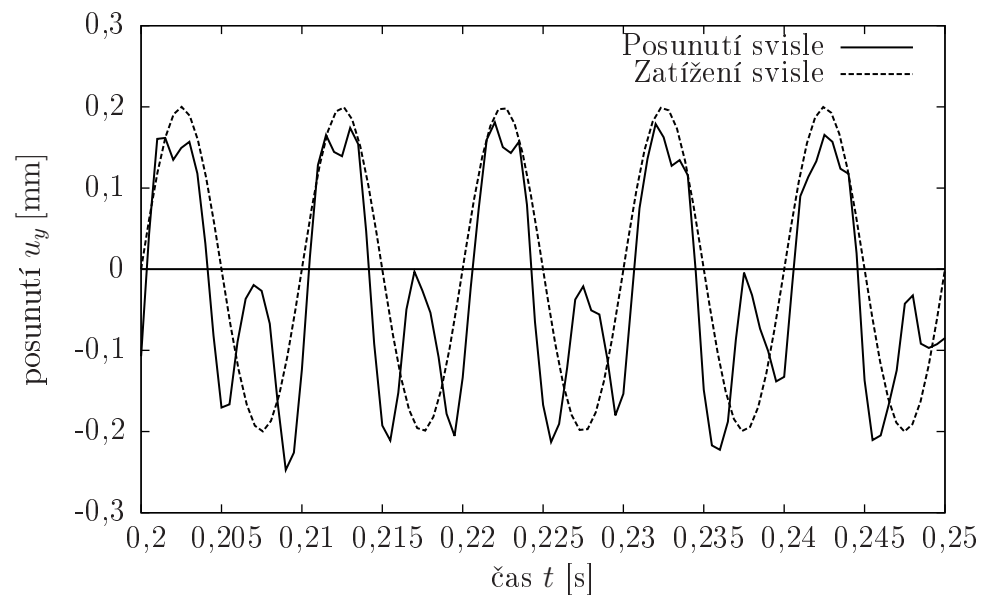
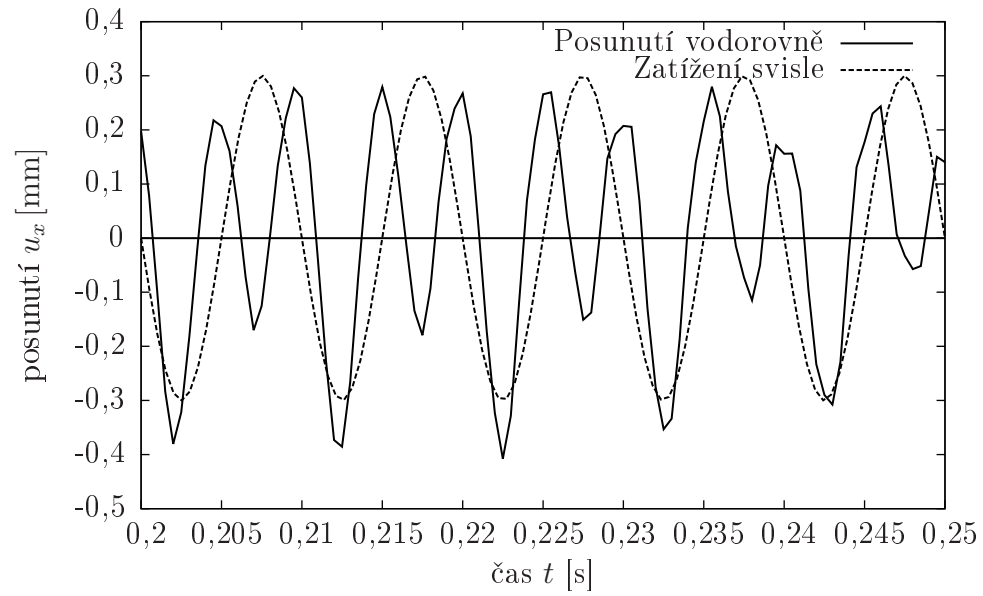
V této simulaci jsem již uvažoval pouze model velkých deformací, který dává přesnější výsledky. Pro prezentaci výsledků jsem si zvolil konkrétní bod $\mathbf{x} = (4, 57; 2, 14)$ mm na povrchu hlasivky v oblasti zatížení a jeho pohyb jsem sledoval v časovém intervalu několika period, dokud jsem nepozoroval ustálený stav. Výsledky pozorování shrnuje graf na obr. 4.2, který je přiblížen pro snadnou orientaci na obr. 4.3 (začátek pohybu) a obr. 4.4 (ustálený pohyb). Pro názornost jsem vynesl i přibližnou trajektorii bodu pohybu (obr. 4.2). Nakonec jsem vynesl tvar hlasivky při ustáleném kmitání ve dvou extrémních polohách (obr. 4.5).



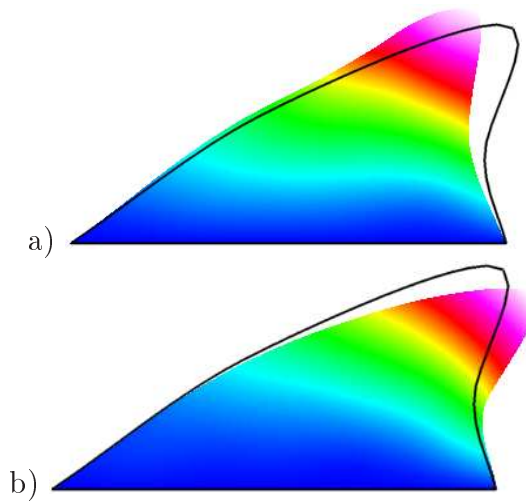
Obrázek 4.2: Souborný pohled na dynamické zatížení hlasivky – posunutí pevného bodu ve vodorovném směru v závislosti na čase. První graf ukazuje průběh vodorovného posunutí při působení harmonickou silou (polovina simulovaného času). Druhý graf ukazuje jednotlivé body trajektorie vybrané částice v čase mezi 1,15 až 2,23 s od počátku pohybu. Spojnicové čáry jsou pouze vodítko pro oči a nevystihují průběh trajektorie.



Obrázek 4.3: Dynamické zatížení hlasivky na počátku zatížení – posunutí pevného bodu v jednotlivých směrech v závislosti na čase.



Obrázek 4.4: Dynamické zatížení hlasivky při ustáleném pohybu – posunutí pevného bodu v jednotlivých směrech v závislosti na čase pro časy $t \in (0, 20; 0, 25)$ s.



Obrázek 4.5: Dynamické zatížení hlasivky při ustáleném pohybu – celkový tvar hlasivky ve dvou extrémních případech kmitání. Pro názornost jsem vybral dvě polohy z úseku znázorněného na obr. 4.4. a) První obrázek znázorňuje hlasivku pro čas $t = 0,2126$ s, kdy je od základny vychýlena nejvíce. b) Druhý obrázek znázorňuje hlasivku pro čas $t = 0,2151$ s, kdy se hlasivka přimyká nejvíce k základně. Obrysová čára vymezuje hranici tělesa v nezatíženém stavu. Barva obrázku kvalitativně vyjadřuje velikost posunutí u . Rozměry obrázku jsou popsány v sekci 3.2 na straně 23.

Kapitola 5

Diskuse

Výsledky statického zatížení jednoznačně ukazují, že při deformacích, kterým je hlasivka vystavena, je třeba uvažovat rovnice mechaniky kontinua ve tvaru pro velké deformace, jinak jsou výsledky zkresleny (obr. 4.1).

Při dynamickém zatížení jsem pozoroval, že odezva na lokální harmonické buzení je nelineární. Masa tělesa původní sílu moduluje, takže posunutí hlasivky má již jinou frekvenci (podle obr. 4.4 přibližně dvojnásobnou), a dokonce má celý pohyb modulační obálku (viz obr. 4.2 nahoře), která má délku přibližně 15 period. Ačkoliv podobné parametry (vyšší harmonické a *vibratto*¹) vykazuje i zdravý pěvecký hlas, který není harmonicky stimulován závěsem, ale přirozeně interaguje s tekutinou, autor považuje tuto souvislost s modulací základního tónu za náhodnou. Dynamická metoda ukazuje, že hlasivka při buzeném pohybu dospěje do ustáleného periodického stavu. Přibližná trajektorie jednoho bodu je na obr. 4.2 dole. Z této trajektorie lze přibližně odhadnout, kdy má bod největší zrychlení.

Zvolená numerická implementace v programu Elmer má nevýhodu, že při řešení velkých deformací neumí vypsát napětí. Výpočet napětí je možné doplnit ad hoc pomocí zvláštní numerické procedury, které však z důvodu rozsahu této práce nebylo možné využít.

Výpočet napětí a zrychlení zvoleného bodu je stěžejní pro analýzu poškození tkáně. V současnosti existují dvě teorie o vzniku hlasových uzlíků (*nodulů*). Podle první vznikají hlasové uzlíky při rázech, kdy se hlasivky dostávají do kontaktu. Podle druhé teorie vznikají hlasové uzlíky prostým namáháním hlasivkové tkáně, která při vyšších frekvencích vzniká setrvačností hmoty hlasivky. V tomto případě nepřichází jiný než matematický přístup v úvahu, protože experimentální metody nelze použít

¹ *Vibratto* je označení pro kolísání hlasu v intenzitě hlasu, případně částečně i ve výšce tónu, s frekvencí okolo 5krát za sekundu.

(skutečné hlasivky při odříznutí rychle mění parametry, umělé hlasivky z gumy se rychle opotřebují).

Nevýhodou uvedeného přístupu je redukce problému na dva rozměry. Zanedbáváme příčné napětí, způsobené nastavením chrupavek a natažením svalů. Na příčném napětí však závisí masa kmitající hlasivky, kterou je ve dvourozměrném případě nutné uměle nastavit vhodnými materiálovými konstantami.

Kapitola 6

Závěr

Formuloval jsem rovnice mechaniky kontinua z bilančních zákonů (tab. 2.1) a odvodil obecný vztah pro reologii čistě mechanického materiálu (2.9). Následně jsem uvažoval jejich nejjednodušší případ, který odpovídá Hookovu zákonu v izotropním materiálu (2.10). Všechny matematické rovnice jsem shrnul do tab. 2.2. Rovnice jsem přepsal do slabé formulace (2.14) a sestavil jsem model hlasivky pomocí kvadratických konečných prvků.

Funkci modelu jsem ověřil díky programu `Elmer` ve statickém a dynamickém případě zatížení hlasivky. Ve statickém případě jsem prokázal, že je třeba uvažovat rovnice s členem pro velké deformace (obr. 4.1). V dynamickém případě jsem zkoumal odezvu hlasivky na harmonický tlak a pohyb vybraného bodu v místě uchycení (tab. 4.2 a grafy na obr. 4.3 a 4.4). Zjistil jsem, že odezva není lineární a je značně ovlivněna vlastnostmi materiálu. Bod v místě uchycení se pohyboval po trajektorii tvaru burského oříšku. Znázornil jsem dva extrémní případy, které charakterizují ustálené vibrace hlasivky (obr. 4.5).

V literatuře jsem nenašel pojednání, které by zahrnovalo do simulace pohybu hlasivek člen pro velké deformace. V tomto ohledu jde o nové výsledky. Především však jde o první krok do budoucna v simulaci hlasivky. Pro získání realistického modelu fonace bude nezbytné hlasivku propojit s modelem proudění. Program `Elmer` poskytuje vhodné prostředí pro simulaci této interakce pomocí ALE metody. Druhou možností budoucích kroků je implementace rázů dvou hlasivek. Vzhledem k numerickým obtížím spojeným s degenerací sítě je simulace rázů hlasivek při velké deformaci složitým problémem. Třetí možností zlepšení je uvažování vícevrstvé hlasivky (podobně jako [11]), resp. hlasivky se složitější reologií; zde přetrvává problém, že reologické vlastnosti lze jen obtížně experimentálně prozkoumat.

Výhodou uvedené numerické implementace je komplexní prostředí umožňující

zkoumání interakce struktury a proudění, schopnost používat normálovou a tangenciální soustavu, volná dostupnost programu, možnost přizpůsobovat si program a doprogramovat požadované procedury (např. výpočet napětí). Nevýhodou je, že některé standardní operace (výpočet napětí) implicitně chybí a grafický výstup není příliš kvalitní a musí se dodělávat ručně. Pokud bude doplněn výpočet napětí, bude možné lépe předvídat namáhání tkání během fonace a odhadovat jejich odolnost.

Zdrojové kódy všech programů a celé práce lze nalézt na přiloženém kompaktním disku. Všechny použité programy jsou volně šiřitelné za podmínek licence GNU GPL.

Literatura

- [1] DONEA, J. et al. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian Methods*. In STEIN, E., BORST, R., HUGHES, T. J. R. (eds.): *The Encyclopedia of Computational Mechanics*. Wiley, 2004. Dostupný z webu <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/0470091355.ecm009/full>
- [2] *Elmer Models Manual*. Espoo: CSC – IT Center for Excellence, 2011.
- [3] *Elmer Solver Manual*. Espoo: CSC – IT Center for Excellence, 2011.
- [4] FLAHERTY, J. E. *Finite Element Analysis*. Lecture notes. New York: Rensselaer Polytechnic Institute, 2002.
- [5] GHATTAS, O. *Computational Optimization of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Variational (weak) form of linear elasticity. Pittsburgh: Carnegie Mellon University, 2003.
- [6] GRAY, H. *Anatomy of the Human Body*. Philadelphia: Lea & Febiger, 1918.
- [7] HORÁČEK, J. et al. Coherent structures in the flow inside a model of the human vocal tract with self-oscillating vocal folds. *Acta Technica* 2010, 55, s. 327–343.
- [8] HORÁČEK, J., ŠVEC, J. G. Aeroelastic model of vocal-fold-shaped vibrating element for studying the phonation threshold. *Journal of Fluids and Structures* 2002, 16(7), s. 931–955.
- [9] HORSKÝ, J., NOVOTNÝ, J., ŠTEFANÍK, M. *Mechanika ve fyzice*. Praha: Academia, 2002.
- [10] JANIŠ, V. *Statistická fyzika*. Skriptum k přednášce. Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta. Praha, 2005.

- [11] KOSÍK, A. et al. *Numerical Simulation of Interaction of an Elastic Body and Fluid Flow*. Interaction and Feedbacks 2010. Institute of Thermo-mechanics AS CR, November 23–24, 2010.
- [12] MARTINEC, Z. *Continuum mechanics. Lecture notes*. Charles University. Faculty of Mathematics and Physics. Department of Geophysics. Prague, 2003.
- [13] MATYSKA, C. *Selected Chapters from the Theory of Partial Differential Equations*. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics. Department of Geophysics. Praha, 2005.
- [14] RAO, S. B., SHANTA, C. K. *Numerical methods: with programs in BASIC, FORTRAN, Pascal and C++*. Hyderabad: Universities Press, 2004.
- [15] RESTREPO, J. *Backward Differentiation Formulas (BDF's)*. Tucson: University of Arizona, 2003. Dostupný z webu <http://www.physics.arizona.edu/~restrepo/475B/Notes/source/node15.html>
- [16] TITZE, I. R. *The Myoelastic Aerodynamic Theory of Phonation*. National Centre for Voice and Speech: Iowa City, 2006. ISBN 0-87414-122-2.
- [17] TITZE, I. R. *Principles of Voice Production*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [18] SOVÁK, M. *Kmitání hlasivek ve světle laryngostroboskopie*. Praha: Česká akademie věd a umění, 1947.
- [19] ŠIDLOF, P. *Fluid-Structure Interaction in Human Vocal Folds* (PhD thesis). Charles University: Prague, 2007.
- [20] VAŠEK, R. *Kultivovaný zpěv, jeho zásady a metodika*. Praha: Panton, 1977.
- [21] VYBÍRAL, B. *Mechanika ideálních plynů*. Studijní text pro řešitele Fyzikální olympiády a ostatní zájemce o fyziku. Hradec Králové: MAFY, 2004.
- [22] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 2005.

Seznam tabulek

2.1	Zákony zachování v materiálním obrázku	16
2.2	Shrnutí matematických rovnic	18
3.1	Parametry triangulační sítě	24
3.2	Materiálové konstanty lineárního a izotropního modelu hlasivky	24

Seznam obrázků

1.1 Anatomie hlasivek.	9
3.1 Geometrie hlasivky	23
3.2 Triangulační síť.	23
4.1 Statické zatížení hlasivky	27
4.2 Dynamické zatížení hlasivky – souborný pohled	28
4.3 Dynamické zatížení hlasivky – počátek pohybu	29
4.4 Dynamické zatížení hlasivky – ustálený pohyb	30
4.5 Dynamické zatížení hlasivky – tvar v extrémních polohách	31

Seznam použitých veličin a symbolů

$\ \boldsymbol{\alpha}\ $	norma definovaná pro matice jako $\sqrt{\boldsymbol{\alpha}^T \boldsymbol{\alpha}}$
\cdot	skalární součin definovaný $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i$
$:$	dvojný skalární součin definovaný $\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\eta} = \sum_{ij} \tau_{ij} \eta_{ij}$
\mathbf{x}	vektor indexu (poloha v referenčním obrázku)
∇	gradient definovaný vzhledem k referenčnímu obrázku
$\nabla_{\mathbf{r}}$	gradient definovaný vzhledem k materiálovému obrázku (index často vynecháván, pokud nejsou pochybnosti)
\mathbf{r}	vektor polohy
t	čas
\mathbf{S}	vektor orientované plochy s normálou $\mathbf{n} = \mathbf{S} / \ \mathbf{S}\ $
dV	element objemu
χ_t	zobrazení z referenčního do materiálového obrázku
\mathbf{u}	vektor posunutí
\mathbf{F}	dvoubodový tenzor deformačního gradientu
\mathbf{R}	ortogonální tenzor v polárním rozkladu $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$
\mathbf{V}	symetrický, pozitivně definitní tenzor v polárním rozkladu $\mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}$
\mathbf{C}	Cauchyho deformační tenzor
$\boldsymbol{\varepsilon}$	tenzor deformace
$\boldsymbol{\eta}$	tenzor rychlosti deformace

\mathbf{f}	síla na jednotkovou hmotnost
$\varphi \cdot d\mathbf{S}$	plošná síla
$\Phi \cdot dV$	objemová síla
J	jakobián transformace \mathbf{F}
ρ	hustota
$\boldsymbol{\tau}$	tenzor napětí
\mathbf{v}	rychlost
\mathcal{E}	vnitřní energie
e	vnitřní energie na jednotku hmotnosti
\mathcal{K}	kinetická energie
\mathbf{q}	vektor tepelného toku