Myšlenka variačního počtu

Jakub Michálek

24. prosince 2008

Milý Simmio, tohle snad není ze stanoviska ctnosti dobrá výměna, vyměňovati si jako peníze libosti za libosti a bolesti za bolesti a strach za strach, větší za menší, nýbrž jistě jedině ona mince je dobrá a za ni je třeba všechno tohle vyměňovati, rozumnost; jen když se za tu a s ní, s rozumností, všecko kupuje a prodává, je to vskutku statečnost a uměřenost i spravedlnost a vůbec pravá ctnost, ať už libosti a strachy i včecky ostatní takové věci přicházejí nebo odcházejí.

Tak jest Sókrate, ale popisoval jsi dříve duši jako nějaký zvláštní druh harmonie, který vzniká na strunách. Porozuměl jsem, že na strunu se lze dívat jako na křivku, a tudíž se tázat, jaký zaujme tvar, pokud není zapřažena do jha životního napětí. Což pak nejsou zákony, které odvisí od tvého lógos, které určují, jaké tvářnosti struna a její harmonie nabývají?

I já jsem se dosti zamýšlel nad problémem libovolné křivky, kterou si mohu představit a tou jedinou, která skutečně nalezne uplatnění, které příroda udělí dar života.

Již jsme pověděli o idejích a lógos a teď se mě Kebéte ptáš, jaké zákony řídí ustálenost křivek. Nuže, začněme tím, že když stojíš na vrcholu kopce, úkrok do všech stran mění výšku mnohem méně, než když učiníš stejně dlouhý krok při stoupání do příkrého srázu.

Tak o tom nepochybuje ani ten nejurputnější pochybovač, Sókrate, ale pověz, co má kopec co dočinění s obecnými křivkami.

Vím, kam míříš, Sókrate. Příkrost kopce nám popisuje v každém bodě číslo zvané derivace; stojíme-li na vrcholu, derivace musí být nulová, protože kdybychom ho chtěli přejít, půjdeme nejprve do kopce (a derivace bude tedy kladná) a potom z kopce (a derivace bude tedy záporná). Jdeme-li od kladného k zápornému, musíme přejít přes nulu, kterou nazýváme vrchol. Kéž bychom nalezli nějaký obdobný postup, který jsem užili na funkce, pro křivky.

Arci, podobá se pravdě, Kebéte. Uvažujme ideální křivku $y(x)$, o níž víme, že splňuje zákon příslušný situaci. Ten může znít, že třeba její těžiště leží co nejníže nebo obecněji, jeho potenciální energie nabývá minima. Co v potenciální energii kleslo nejníže, už těžko může vykonávat další pohyb, pokud už stojí. Navíc uvaž zákon, který objevil můj žák Aristoteles, totiž že tělesa mají sklon se zastavovat, pokud na ně nepůsobíme silou.

Ovšemže, jak ale naleznout tu ideální křivku?

Teď už, Sókrate, můžeme použít naši myšlenku kopce! Stačí totiž vzít nějakou referenční křivku $y_0(x) = y(x) + \eta(x)$, která má stejné výchozí a koncové body a zároveň leží velice blízko původní křivce. Pokud stojíme na kopci, budou těžiště obou křivek ležet přibližně ve stejné výšce. Jinými slovy, pokud $F(y, y', x)\,\mathrm{d}x$ značí potenciální energii jako funkci polohy a jejího sklonu, která je úměrná kousku osy $\mathrm{d}x$ (a vždy lze takovou vhodnou funkci nalézt), tak v okolí kopce musí platit

$$F(y, y', x)\,\mathrm{d}x = F(y + \eta, y_0' + \eta', x)\,\mathrm{d}x.$$

Ano, tedy ukázalo se možným, že člověk napíše nějakou zákonitost, která odpovídá tomu, co kolem sebe pozoruje. Rozkrývá tak rozumem skutečnost a vyjevují se mu ideje. Z tvého principu, Kebéte, a doufám, že Simmio bude souhlasit, vyplývá také rovnost

$$0 = F(y + \eta, y_0' + \eta', x) - F(y + \eta, y_0', x) + F(y + \eta, y_0', x) - F(y, y', x).$$

Věru ani já sám již nevím, jak bych tomu po těchto výkladech nevěřil. Avšak velikost předmětu, o kterém se mluví, a to, že mám malé mínění o lidské slabosti, mě nutí, abych ještě měl sám u sebe pochybnosti o tom, co bylo řečeno.

Ano, problém skutečně leží ve velikosti předmětu η. Všimni si však, že pokud se spokojíme s η malými, můžeme udělat součet na pravé straně ještě mnohem menší.

To máš pravdu. Stačí aby se odečetly.

Sókrate, není-li pravda, že jsme tak převedli problém na jakési derivace? Vždyť stačí rozšířit první dva členy η' a druhé dva členy η a hned se nám podle definice objeví derivace, při nichž ostatní souřadnice zůstávají konstantními.

Nejenom to, Kebéte. Jednoduchou rovnici $\eta' \frac{\partial F}{\partial y'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ už snadno upravíme podle vztahu pro derivaci součinu, protože platí $\left(\eta \frac{\partial F}{\partial y'}\right)' = \eta' \frac{\partial F}{\partial y'} + \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'}$, takže nám zbývá řešit rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\eta \frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

S tím ale nesouhlasím, Sókrate! Vždyť potom jsme neměli vůbec oprávnění zkrátit ten kousek $\mathrm{d}x$ v první rovnici. Ledaže by...

Výkladu rozumíš vskutku skvěle a vidím, že si svou námitku už vyvrátit umíš. Když jsme psali první rovnici, ve skutečnosti jsme měli na mysli součet všech dílčích potenciálních energií, tedy celkovou potenciální energii. Pokud však sčítáme malé rozdíly $\int \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}x = \int \mathrm{d}P$, vždy dostaneme rozdíl výchozí a konečné hodnoty funkce $P(x) - P(0)$. Jak jsme pravili, η se v obou případech rovná nule, a proto si s prvním členem nemusíš lámat hlavu. Zbylá rovnice (protože většinou je $\eta \neq 0$) pro ideální křivku zní

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Teď o tom skutečně nemám pochyb. Uznáš však, že hledat obecné řešení této rovnice nemusí být snadné.

Arciže, a proto vám ukážu trik, jakým postupovat, pokud minimalizovaná funkce F nezávisí na x, ale pouze na y a y'. Vynásobíme rovnici y' a upravíme podle pravidla pro derivaci součinu

$$y'\frac{\partial F}{\partial y} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'} = y'\frac{\partial F}{\partial y} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right).$$

Jak vypočítáme celkovou změnu F, pokud se pohneme o $\mathrm{d}x$? Určitě zde bude vystupovat člen $\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x$, který je v našem případě nulový, ale také se trochu změní poloha a rychlosti, a protože F na obou závisí, musíme přičíst ještě členy $\frac{\partial F}{\partial y}y'\mathrm{d}x$ a $\frac{\partial F}{\partial y'}y''\mathrm{d}x$. Obecnější poučka tvrdí $\mathrm{d}F = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F(x_i)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j$.

Již vím, kam míříš, Sókrate, protože to jsou právě členy na prvé straně, které můžeme přepsat na úplnou derivaci $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}$, protože $F = F(y, y')$. Důsledkem $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right)$, takže pokud funkce F nezávisí explicitně na x, veličina $E = y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F$ se zachovává.

Vidím, že tento způsob uvažování je ti blízký. V tomto životě ho sice už asi nevyužiješ, ale až se prožiješ přes psy a včely zase jednou do člověka, uznáš, že zákony světa – lógos – lze formulovat i tak, že určitá funkce $L(x, \dot{x}, t)$ má v okolí skutečných trajektorií stacionární hodnotu (v okolí se její hodnota chová jako "vrchol kopce"). Bohové vědí, třeba se jednou bude jmenovat Kebétova funkce.[1] Pokud tato funkce nezávisí explicitně na čase, existuje konstanta E zvaná energie, která se zachovává, jak jsi sám ukázal.

[1] Dnes se jmenuje Lagrangeova.