Mechanika pro střední školu [Zatím nedokončeno]

Jakub Michálek

9. července 2008

2.19 Logický obraz může zobrazovat svět.

Úmluva

Rovnosti, kde pouze přepisujeme definici, označuji trojitým rovnítkem $\equiv$; doslova běží o ekvivalenci. Konstanty značím zpravidla velkými písmeny; výjimky z tohoto pravidla indikuji závorkami s proměnou. Pokud nepíšem jinak, derivace se rozumí v daném místě x nebo čase t.

„Důkazy" v této knížce postrádají matematickou rigoróznost, k čemuž mě vedly tyto důvody 1) podání má především rozvíjet intuitivní chápání, 2) matematickému zdůvodnění se věnují příslušné předměty, 3) skutečná rigoróznost vyžaduje důkladnou znalost teorie čísel, což by stat' neúměrně natáhlo, 4) většinu „důkazů" lze snadno precizovat. Některá tvrzení naopak nelze za důkazy považovat vůbec (derivace složené funkce). 5) Nechci odradit čtenáře od fyziky zbytečnou prvotní přísností.

Část I
Souřadnice určují stav popisovaného

2.161 V obraze a zobrazeném může být cosi identického, aby jedno vůbec mohlo být obrazem druhého.

1 Reálná souřadnice

V mechanice určují stav systému souřadnice a rychlosti. Počet nezávislých souřadnic označujeme jako stupeň volnosti. Schopnost vybrat vhodné souřadnice usnadňuje řešení problému. Zde uvažujeme dva typy souřadnic: 1) kartézské, 2) úhlové.

Jejich kombinací sestavíme vhodnou soustavu souřadnic. Nejprve určíme, zda se pohyb omezuje pouze na povrch, pak se počet volností snižuje na dva, pokud na křivku, pak na jeden. Zde uvažujeme pouze takové případy.

Souřadnice volíme většinou tak, aby jejich jednotkové vektory byly na sebe kolmé ve všech bodech. Jednotkovým vektorem rozumíme čáru procházející daným bodem, podél níž se mění pouze jedna ze souřadnic.

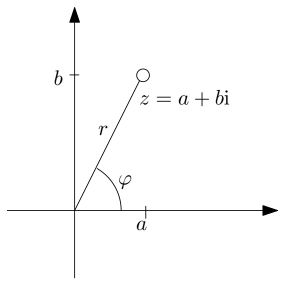
název soustavy	souřadnice	poznámka
kartézská	x, y, z	prostor
kartézská	x, y	rovina
polární	r, φ	rovina
pohyb po kružnici	φ	křivka
pohyb po přímce	x	křivka
kulové	r, θ, φ	prostor
válcové	r, φ, x	prostor

Důkaz sinx/x=1

2 Komplexní souřadnice

[Tuto kapitolu lze přeskočit a vrátit se k ní až po pročtení druhé části.]

V některých problémech se ukazuje, že nejjednodušší řešení dosáhneme, pokud místo dvou proměnných uvažujeme pouze jednu, ovšem se dvěma složkami. Do jisté míry se jedná o analogii vektoru v rovině, ale čísla (narozdíl od vektorů) umíme nejen sčítat, ale i násobit, dělit a odmocňovat. Vyjde nám zase číslo. Z počátku budeme pracovat pouze matematicky a souvislosti s fyzikou se postupně osvětlí.



Obrázek 1: Gaussova rovina

Komplexním číslem rozumíme uspořádanou dvojici reálných čísel (tj. záleží na pořadí). První z nich nazýváme reálná část, druhou imaginární. Dvě komplexní čísla sčítáme tak, že sečteme obě jejich části; dvě komplexní čísla se rovnají, rovnají-li se jejich části. Zavedeme přehledný diagram, v němž vyneseme komplexní číslo jako v kartézské rovině. Součet dvou čísel uděláme stejně jako součet dvou vektorů.

Násobení dvou komplexních čísel je složitější. Součin čísel $u = u_1 + u_2\mathrm{i}$, $v = v_1 + v_2\mathrm{i}$ lze definovat $uv \equiv u_1v_1 - u_2v_2 + \mathrm{i}\,(u_2v_1 + u_1v_2)$. Existuje naštěstí jednoduchá pomůcka, podle níž $\mathrm{i}^2 = -1$ a oba výrazy tak prostě vynásobíme a nahradíme druhé mocniny i číslem -1. Abychom se však vyhnuli dlouhému násobení či dokonce umocňování, zavedeme goniometrický tvar komplexního čísla. V něm číslo určuje jeho velikost r a úhel φ. Čísla s velikostí $r = 1$ nazýváme komplexní jednotky. Přímo z obrázku odvodíme hledanou transformaci $a = r\cos\varphi, b = r\sin\varphi$, takže číslo můžeme psát $z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Ted' snadno vypočteme součin čísel $z_1z_2 = r_1r_2\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_1\cos\varphi_2)$. Zdá se, že jsme si příliš nepomohli, ale pokud znáte sčítací vzorce $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2$ a $\sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2$, jistě už tušíte pravidlo pro násobení komplexních čísel

$$z_1z_2 = r_1r_2\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\,\mathrm{i})$$

Při násobení se argumenty sčítají a velikosti násobí. Sami odpovězte, čemu odpovídá vynásobení číslem $\pm\mathrm{i}$. Zdůvodněte také vztah pro umocňování $z^n = r^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$, zvaný Moivrova věta.

Upravme podle Moivrovy věty $\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \left(\cos\frac{\varphi}{N} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{N}\right)^N$. To vlastně znamená, že libovolnou komplexní jednotku můžeme brát jako N rotací o úhel $\frac{\varphi}{N}$ z původního čísla 1. Dokázali jsme, že pro malé úhly platí $\sin\varphi = \varphi$ a $\cos\varphi = 1$. Pokud bereme velmi vysoké N, můžeme směle odhadnout

$$\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi = \lim_{N\to\infty}\left(1 + \frac{\mathrm{i}\varphi}{N}\right)^N \equiv \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}.$$

Teď však víme, že

$$\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

a sečtením a odečtením dostaneme vztahy pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \\ \sin\varphi &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}. \end{aligned}$$

Na základě těchto vztahů (alternativně) odvoďte derivace goniometrických funkcí.

Část II
Rychlost ukazuje časovou změnu

3 Derivace

Mechanika, stejně jako celá fyzika, stojí na pojmu derivace. Ukazuje se, že náš svět není pořád stejný, a potřebujeme proto prostředky na měření jeho změn. Stejnému problému čelíme, když nás na silnici zajímá stoupání nebo chceme znát rychlost auta.

Pokud má silnice pořád stejný sklon (jako přímka v geometrii), její směrnici určíme jednoduše: V rovnici $y = mx+b$ se jedná o číslo m. Tento fakt zapisujeme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = m$. (Mimo jiné z toho vidíme, že pro konstantní funkci je $m = 0$.) Jak však určit sklon pro libovolně složitou funkci $y(x)$? Za prvé, na rozdíl od přímky to nebude stejný ve všech místech. Místo x_0, ve kterém ji měříme, píšeme za svislítko $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x_0} = m$. Za druhé, použijeme přímku (u níž sklon určit umíme) za vzor a postupujeme zcela stejně s tím, že sklon určujeme na velmi krátkém intervalu. Podobně určujeme okamžitou rychlost jako průměrnou rychlost v dostatečně malém okolí bodu x_0. Vše vysvětlíme na příkladu.

Mějme funkci $y(x) = x^3$, která určuje objem krychle v závislosti na délce její hrany. Krychle má v daném okamžiku hranu o délce x_0 a příslušný objem $y(x_0)$. Pokud zvětšíme délku všech hran o délku h, o kolik se změní objem? Přímá odpověď se určí jako rozdíl $y(x_0+h) - y(x_0) = 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3$. Závislost jakékoliv funkce $y(x)$ na změně x_0 o nějaké malé h lze obecně vyjádřit jako nějakou polynomickou funkci h

$$y(x_0+h) - y(x_0) = mh + nh^2 + ph^3 + \ldots \tag{1}$$

Podobnou úvahu proveďte místo krychle pro úsečku a obdélník. Sami zdůvodněte, proč na pravé straně (1) nepíšeme ještě konstantní člen. Zde máme $m = 3x_0^2, n = 3x_0, p = 1$, takže členy závisí na místu x_0, kde přírustek určujeme. Pokud však změna délky hrany krychle bude velmi malá (pro určitost 10^{-3}), budou větší mocniny směšně malé ($10^{-6}, 10^{-9}$), a proto je zanedbáme. Přírustek objemu závisí v podstatě pouze na první mocnině h. Všimněte si, že úlohu opodstatňuje pouze fakt, že h volíme skutečně malé, což zapisujeme $\lim_{h\to 0}$. Příslušný koeficient a_1 ověříme následující úvahou: Zvětšení všech stran o h se projeví přírustkem tří tenkých desek o podstavě x_0^2 a výšce h a relativně malým objemem tří trámků (u hran) a jedné opravdu malé kostičky.

Zápis (1) upravíme do tvaru

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} \equiv \lim_{h\to 0} \frac{y\left(x_0+h\right) - y\left(x_0\right)}{h} = m, \tag{2}$$

kterému vložíme význam geometrický: Funkce $y\left(x\right)$ má v bodě x_0 tečnu (přímku) se směrnicí m. Z této definice plyne, že součinitele můžeme předsunout před derivaci. V základní mechanice vystačíme s třemi pravidly: 1) derivace součinu a mocninné funkce $y = x^n$, 2) derivace exponenciály $y = \mathrm{e}^x$ a 3) derivace složené funkce.

Nakonec se zmíníme o časové derivaci, kterou také značíme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{y}$. V praxi lze realizovat takové měření například světelnými bránami, které jsou vzdáleny známou vzdálenost $L \equiv y\left(x_0+h\right) - y\left(x_0\right)$ a měří laserem čas mezi dvěma signály průchodu. Tento příklad zcela odpovídá naší definici, neboť brány musí být dost blízko, aby se měřená průměrná rychlost v daném intervalu skutečně blížila okamžité rychlosti.

4 Derivace mocninné funkce

Naše zatímní poznatky shrneme do tabulky

funkce $y\left(x\right)$	derivace $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right\|_{x_0}$	útvar
konst	0	bod
x	1	úsečka
x^2	$2x_0$	čtverec
x^3	$3x_0^2$	krychle

Z geometrické definice, v níž uvažujeme malou změnu hrany o h, vidíme, že příslušný „objem“ se zvětší o obsah jedné ze dvou „podstav“ násobený h. Odtud usuzujeme na obecné pravidlo $\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$. Ověřte platnost tohoto pravidla na bodu, kružnici a kouli.

Naše domněnky ovšem nezakládají matematický důkaz, který podáme pro $n \in \mathbb{N}$. Nejprve odvodíme jednoduchou formulku pro derivaci součinu dvou funkcí $u\left(x\right)$ a $v\left(x\right)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(uv\right) &= \frac{\left(u+\mathrm{d}u\right)\left(v+\mathrm{d}v\right) - uv}{\mathrm{d}x} \\
&\equiv \frac{u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u + \mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \\
&= v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

Součin dvou diferenciálů jsme zanedbali, protože už na začátku jsme určili, že počítáme pouze do prvního řádu. Protože už víme, že derivace konstanty se rovná nule, použijeme součinovou formuli na funkci pro první tři n v $y = x^n$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,(x \cdot x)}{\mathrm{d}x} &= x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 2x \\ \frac{\mathrm{d}\left(x^2 \cdot x\right)}{\mathrm{d}x} &= x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 = x^2 + 2x \cdot x = 3x^2\end{aligned}$$

Vidíme, že u každé derivace členu $x^n = x \cdot x^{n-1}$ vystoupí člen x^{n-1}, k němuž přičítáme člen $(n-1)\,x^{n-2}x$, čímž jsme dokázali vztah pro derivaci $\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Lze dokázat, že tento vztah platí pro libovolné $n \in \mathbb{R}\backslash 0$.

5 Derivace složené funkce

Nabízí se složitější problém, jak derivovat funkce typu $y\,(x) = f\,(g\,(x))$, které nazýváme složené. Jako motivaci užijeme příklad $g\,(x) = x^m$ a $f\,(g) = g^n$, takže $y\,(x) = x^{mn}$ $(mn \neq 0)$. Derivaci funkce x^{mn} určíme podle pravidla pro derivaci mocninné funkce $\frac{\mathrm{d}x^{mn}}{\mathrm{d}x} = mnx^{mn-1}$. Jak určíme derivaci $f\,(g\,(x))$? Snad by měla být úměrná derivaci $\frac{\mathrm{d}f(g)}{\mathrm{d}g} = ng^{n-1} = nx^{mn-m}$. Koeficient úměrnosti

$$a = \frac{mnx^{mn-1}}{nx^{mn-m}} = mx^{m-1} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

Zjistili jsme, že hledaný koeficient úměrnosti se rovná derivaci vnitřní funkce! Náš odhad můžeme proto zapsat

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$$

V této podobě si lze pravidlo nejsnáze zapamatovat, formálně pouze rozšiřujeme zlomek. Pro derivaci složené funkce platí obecně, což dokazovat nebudeme.

6 Derivace exponenciály

Exponenciálu definujeme jako funkci $\mathrm{e}^x \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Derivaci určíme podle pravidla derivování složené funkce a derivace polynomu, pokud předpokládáme, že $n \in \mathbb{N}$.[1]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}\frac{1}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}{1 + \lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}} = \mathrm{e}^x$$

Tento fakt činí exponenciálu obzvláště vhodnou pro rovnice, kde se objevují její derivace.

[1] Protože jednáme bez matematické rigoroznosti, můžeme si dovolit prohodit limitu a derivaci, což není vždy možné (posloupnost musí být stejnoměrně konvergentní).

7 Kolotoč

Na kolotoči pocit'ujeme větší tíhu než obvykle. Ted' učiníme první kroky k vysvětlení tohoto jevu. Abychom obecně popsali človíčka na kolotoči, potřebujeme tři kartézské souřadnice, tři reálná čísla. Pokud však zanedbáme obvyklý fakt, že se kolotoč nachází v tíhovém poli, a umístíme celý pohyb do roviny, stačí nám k popisu pouze úhel $\varphi \in \mathbb{R}$ pootočení od určité základní polohy, například stánku se vstupenkami. Ukazuje se, že cesta k řešení se zjednoduší, pokud použijeme popis v komplexních číslech. Důvod však pramení z největších hloubek fyziky, kde se k popisu také používají komplexní čísla. Musíme však bezpodmínečně dbát na to, aby výsledek byl „reálný“.

Komplexní rovina v tomto případě splývá s kartézskou soustavou dvou kolmých souřadnic, v jejichž počátku je řetízek kolotoče uchycen. Kolotoč se otáčí rovnoměrně, a úhel $\varphi = \omega t$ je tedy přímo úměrný času. Součinitel úměrnosti ω se nazývá úhlová rychlost. Ukažte, že pokud otáčka trvá T sekund, dostaneme $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Polohu v komplexní rovině určuje (z definice úhlu φ) číslo

$$P(t) = R\cos\varphi + \mathrm{i}\,R\sin\varphi = R(\cos\omega t + \mathrm{i}\,\sin\omega t).$$

Dříve jsme ukázali, že pro komplexní čísla platí vztah $\cos\varphi + \mathrm{i}\,\sin\varphi = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, pomocí něhož přepíšeme polohu do jednoho výrazu

$$P(t) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Vypočítáme ted' rychlost a zrychlení jako první a druhou derivaci. Derivovat exponenciálu však umíme, pouze ji vynásobíme derivaci vnitřní funkce, členem $\mathrm{i}\omega$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t} &= \mathrm{i}\omega R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = \mathrm{i}\omega P(t)\\ \frac{\mathrm{d}^2P(t)}{\mathrm{d}t^2} &= (\mathrm{i}\omega)^2 R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = -\omega^2 P(t)\end{aligned}$$

Provedeme rozumovou kontrolu: U rychlosti násobíme polohu číslem i. Sčítat dvě komplexní čísla znamená sečíst jejich argumenty a vynásobit jejich velikosti. Velikost i se rovná jedné a její argument se rovná pravému úhlu, rychlost je tedy kolmá na polohu, což dává rozum. Zrychlení působí do středu, což také dává smysl.

Část III
Zákony zachování

8 Zákon zachování energie

Celková energie se v izolované soustavě zachovává.

Kinetickou energii můžeme psát jako přímo úměrnou hmotnosti (čím více hmotnosti, tím více energie) a nějak závislou na rychlosti

$$T(v) = m\left(a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \dots\right).$$

Obvykle se volí člen a_0 nulový, což v mechanice usnadňuje výpočty. Beztak se ve vztazích nemusí uvažovat, protože vždy mluvíme o rozdílech energie; konstanty by se odečetly. Při odhadování členu a_1 se držíme naší představy o energii: Sedačka na řetízkovém kolotoči se otočí o přímý úhel, takže rychlost má opačný směr. Podle vztahu $T(v)$ se kinetická energie změní o $2m\left(a_1 v + a_3 v^3 + \dots\right)$. Žádnou práci jsme však nevykonali, a tak se tento člen rovná nule pro všechny rychlosti, takže všechny koeficienty $a_i = 0$ pro lichá i. V mechanice proto pracujeme s kinetickou energií

$$T(v) = m\left(a_2 v^2 + a_4 v^4 + a_6 v^6\right) \approx a_2 m v^2 = \frac{1}{2} m v^2, \tag{3}$$

kde jsme zanedbali vyšší mocniny, protože se pohybujeme malými rychlostmi a zvolili jsme dohodou koeficient $a_2 = \frac{1}{2}$. Tuto definici kinetické energie budeme užívat ve zbytku textu.

Přirozený předpoklad nejvyšší (ne)dosažitelné rychlosti světla přinesl opravu. Jinak bychom mohli urychlovat vlaky na rychlost světla konečným množstvím energie. A. Einstein navrhl nový vztah pro energii, který pro rychlost světla diverguje

$$T(v) = mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \equiv m_{\mathrm{rel}} c^2,$$

kde zavedl hmotnost, která závisí na rychlosti. Pokud rozepíšeme závorku podle binomické věty $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots$, dostaneme přesný vzorec pro kinetickou energii

$$T(v) = mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \frac{5}{16}\frac{v^6}{c^6} + \dots\right) = mc^2 + \frac{1}{2} m v^2 + \frac{3}{8c^2} m v^4 + \dots$$

Na pravé straně poznáváme klidovou energii mc^2 a první člen odpovídá známe kinetické energii; další členy lze pro malé rychlosti zanedbat.

9 Zákon zachování hybnosti

10 Zákon zachování momentu hybnosti

11 Tíhové pole na povrchu Země

11.1 Newtonův vztah a jeho přiblížení

Pro malé rozdíly výšek, lze uvažovat potenciální energii přímo úměrnou výšce $V = mgh$. Lepší vztah pro potenciální energii navrhl Newton $V(x) = -m\frac{GM}{r}$, kde r značí vzdálenost od středu Země, M hmotnost Země a G gravitační konstantu. Tělesa ve velkých vzdálenostech mají téměř nulový potenciál, proto nepocit'ujeme gravitační působení dalekých galaxií.

Stojím na povrchu Země a náš kamarád kouká z okna ve výšce h. Jaký je rozdíl našich potenciálních energií? Moje potenciální energie se rovná $-m\frac{GM}{R_Z}$ a jeho $-m\frac{GM}{R_Z+h}$, má proto větší potenciální energii. Rozdíl těchto energií určíme přímo $-m\frac{GM}{R_Z+h} + m\frac{GM}{R_Z} = mGM\frac{-R_Z+R_Z+h}{R_Z(R_Z+h)} = mGM\frac{h}{R_Z(R_Z+h)}$. Pokud činí rozdíl mezi našimi polohama miliontinu zemského poloměru a my ho zvětšíme na dvojnásobek, zvětší se čitatel na dvojnásobek, ale jmenovatel se téměř nezmění. Platí tedy $V = mgh$, kde $g = \frac{GM}{R_Z^2} = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Volná tělesa zrychlují na povrchu Země se stejným zrychlením.

11.2 Trajektorie pohybu

Na povrchu Země máme přibližně homogenní pole. Pokud házíme kamenem a nestřílíme rakety přes Atlantský oceán, takové přiblížení lze přijmout. Vliv vzduchu zanedbáváme. Začněme řešením volného pádu. Na počátku má těleso rychlost v a jeho energie se zachovává $E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + mgy$.

Rovnici zderivujeme podle času,

$$\begin{aligned} 0 &= m\dot{y}\ddot{y} + mg\dot{y} \\ \ddot{y} &= -g \end{aligned}$$

Všechna tělesa, bez ohledu na počáteční rychlost, zrychlují se stejným zrychlením g.

12 Harmonický oscilátor

Harmonický oscilátor požívá ve fyzice zásadního postavení. Každou stabilní rovnovážnou polohu (kuličku v důlku, atom ve mřížce) lze totiž přibližně nahradit harmonickým oscilátorem. Podívejme se na dva základní příklady harmonického oscilátoru: 1) závaží o hmotnosti m kmitá na pružince s klidovou délkou L a tuhostí k; 2) náboj kmitá v obvodu s kondenzátorem o kapacitě C a cívkou o indukčnosti L.

Abychom využili dosud odvozené poznatky, odvodíme pohyb obou různými způsoby.

12.1 Pružina

Pružina se vyznačuje tím, že potenciální energie do ní ukládaná nezávisí na znaménku prodloužení. Když pružinu stlačíme z rovnovážné délky L o nějakou délku x, bude v ní uložena stejná energie jako v pružině, kterou o stejnou délku natáhneme. Předpokládejme, že má závislost potenciální energie pružiny tvar polynomu libovolného stupně

$$V(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Pokud budeme uvažovat pouze malá vychýlení pružiny (pro konkrétnost třeba setina metru), bude první člen nějaká konstanta nezávislá na vychýlení, druhý člen bude řádově jedna setina, ale třetí člen bude řádově jedna desetitisícina, a můžeme ho tedy společně se zbytkem řady zatím zanedbat. Pro kladné a_1 se potenciální energie jistě zvětší, pokud pružinu natáhneme. Pokud ji však stlačíme, energie by s zmenšila, což však dává spor s předpokladem o rovnovážné délce. Pro rovnovážnou délku musí $a_1 = 0$. Co by se stalo, pokud by $a_1 \neq 0$? Pružina by se sama zkrátila nebo prodloužila, než by atomy člen a_1 vynulovaly. Z této úvahy také vyplývá, že pružinu už nemůžeme stlačovat nebo natahovat, abychom získali práci. Bereme proto potenciální energii při rovnovážné délce za nulovou: $a_0 = 0$. Pokud zanedbáme vyšší členy (protože výchylky jsou rozumné), má pružina potenciál $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, kde jsme nahradili $a_2 = \frac{k}{2}$ a nazvali jsme konstantu k tuhostí.

12.2 Závaží na pružince

Předpokládejme, že energie se na pružince se závažím neztrácí. Souřadnici y počítejme od klidové délky pružiny bez závaží l. Zachování energie potom vyjadřuje vztah

$$E = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + mgy \tag{4}$$

Ukážeme, že pohyb závaží na pružince je jistým způsobem stejný jako pohyb na kolotoči. Stejné rovnice totiž mají stejná řešení. Nejprve doplníme na čtverec

$$E + \frac{m^2g^2}{2k} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}k\left(y + \frac{mg}{k}\right)^2$$

takto zavedeme proměnnou $q = y + \frac{mg}{k}$, v nichž má rovnice jednodušší tvar:

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{1}{2}kq^2. \\ \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}t} = 0 &= m\ddot{q}\dot{q} + k\dot{q}q \\ 0 &= \ddot{q} + \frac{k}{m}q \end{aligned}$$

Vrátíme se teď ke kolotoči, pro jehož pohyb jsme odvodili rovnici $\ddot{P} + \omega^2 P = 0$, která platí pro x i y. Rovnice (a jejich řešení) se budou formálně shodovat, pokud položíme $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Víme však, že x-ová souřadnice se mění jako $x = R\cos\omega t$, takže i pohyb po pružince se řídí zákonem $q = A\cos\omega t$.

12.3 Kmitající obvod

Za určitých idealizací[2] lze sestrojit obvod, ve kterém harmonicky osciluje napětí i proud. V rámci našich úvah se lze spokojit s analogií proudění vody, v níž napětí představuje výškový rozdíl hladin (rozdíl potenciální energie). Do obvodu se připojí kondenzátor a cívka. Kondenzátor slouží k hromadění náboje v obvodu, cívka slouží ke snižování změn proudu.

12.3.1 Kondenzátor

Skutečný kondenzátor se sestavuje ze dvou plátů, na nichž jsou opačné náboje. Čím blíže jsou náboje, tím více náboje kondenzátor pojme, ale pokud přesáhne napětí určitou hodnotu, elektrický výboj (malý blesk) přeskočí mezi pláty a náboj se sníží. Ve vodní analogii lze kondenzátor nahradit nádobou s přívody ze obou stran. Uprostřed nádoby je nepropustná blána, kterou lze pružností natahovat. Pokud je na jedné straně vyšší vodní tlak (tedy v naší analogii napětí), blána se vyduje.

[2] Názvosloví této kapitoly je úmyslně vágní a má vytvořit pouze představu o analogiích ve fyzice.

Energie kondenzátoru V nezávisí na znaménku náboje na jedné straně a lze pro ni provést podobnou úvahu jako pro pružinu. Závisí na druhé mocnině náboje přes součinitel C, který se nazývá kapacita a měří se ve Faradech [F]:

$$V = \frac{Q^2}{2C}$$

12.3.2 Cívka

Cívka se sestává z drátu stočeného do tvaru anuloidu. Uvnitř se vytváří magnetické pole, které je přímo úměrné proudu. Pokud se proud cívkou změní, změní se i magnetické pole. Ukazuje se, že v přírodě způsobuje náhlá změna magnetického pole napětí, které má opačný směr. Cívka proto brání změnám proudu.

Zvláště vhodnou představu poskytuje vodní analogie, v níž cívce odpovídá těžké mlýnské kolo. Pokud chceme zvýšit proud, klade nám mlýnské kolo odpor. Při snížení proudu zase vstupuje do hry setrvačnost kola. Energie závisí na druhé mocnině proudu přes součinitel L zvaný indukčnost a měření v Henry [H]

$$V = \frac{1}{2}LI^2$$

12.3.3 Harmonický oscilátor

Máme obvod pouze se dvěma prvky: Cívkou a kondenzátorem. Uvažujme částici v obvodu: Prochází cívkou a ta ji zpomalí, dojde do kondenzátoru a ten ji zrychlí. Kdyby se vrátila a měla menší rychlost než původně, dostali bychom spor s předpokladem, že se neztrácí energie. Nemůže být ani rychlejší, protože bychom dostali perpetum mobile. Celková energie se tedy rovná nějaké konstantě, pro jednoduchost ji položme rovnu nule (zkuste přičtením vhodného členu ke $Q(t)$ vyřešit rovnici i s pravou stranou rovnou konstantě),

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{Q^2}{2C} = 0$$

Základním předpokladem je také uchování náboje. Proud v obvodu se rovná změně náboje na kondenzátoru $I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$. K řešení dospějeme nejrychleji substitucí $Q = Q_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, tedy $I = \mathrm{i}\omega Q_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Opět vidíme, že proud bude posunutý proti napětí o pravý úhel. Dosazením do rovnice máme vztah $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, pojmenovaný Thomsonův.

13 Planeta

Vyřešíme nyní obecně pohyb v poli, které klesá s první mocninou vzdálenosti. Dozvíme se tak nejen, jak se pohybují planety okolo slunce, ale i částice nalétavající na zlatou fólii. Tímto experimentem objevil Rutherford, že většina hmoty atomu se soustřeďuje v jádru.

V polární soustavě r, φ má hmotný bod m energii $E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\gamma m}{r}$, kde značíme $\gamma = GM$. Kvadrát rychlosti přepíšeme podle Pythágorovy věty $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 = (r'\dot{\varphi})^2 + r^2\dot{\varphi}^2$. [Derivace podle úhlu značíme čárkou, podle času tečkou.] Zákon zachování momentu hybnosti vyžaduje $L = mrv = mr^2\dot{\varphi}$. Zaveďme nyní substituci $r = \frac{1}{q} \Rightarrow r' = -\frac{q'}{q^2}$, podle níž přepíšeme oba zákony na

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi} &= \frac{L}{m} q^2 \\
E &= \left(\frac{q'^2}{q^4} + \frac{1}{q^2} \right) \frac{L^2}{2m} q^4 - \gamma m q \\
\frac{2mE}{L^2} &= q'^2 + q^2 - \frac{2\gamma m^2}{L^2} q
\end{aligned}$$

Tím jsme však dostali rovnici harmonického oscilátoru. Stačí doplnit na čtverec a dosadit řešení – třeba $q = A \cos\varphi + \frac{\gamma m^2}{L^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{2mE}{L^2} + \frac{\gamma^2 m^4}{L^4} &= q'^2 + \left(q - \frac{\gamma m^2}{L^2} \right)^2 \\
\frac{2mE}{L^2} + \frac{\gamma^2 m^4}{L^4} &= A^2 \sin^2\varphi + A^2 \cos^2\varphi = A^2 \\
q &= \sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{\gamma^2 m^4}{L^4}} \cos\varphi + \frac{\gamma m^2}{L^2}
\end{aligned}$$

Úlohu řeší tzv. kuželosečka

$$r = \frac{\frac{L^2}{\gamma m^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3 \gamma^2}} \cos\varphi} \equiv \frac{r_\mathrm{p}}{1 + \varepsilon \cos\varphi},$$

kde r_p značí nejbližší vzdálenost. Dokážeme teď, že pro $0 < \varepsilon < 1$ se jedná o elipsu (celková energie je záporná). Elipsou rozumíme křivku, která má stejný součet vzdáleností od dvou bodů (ohnisek). Předpokládejme, že jeden z bodů leží v počátku soustavy a druhý ve vzdálenosti $2\varepsilon a$. Podle cosinové věty měří vzdálenost od druhého bodu $r' = \sqrt{r^2 - 4\varepsilon a r \cos\varphi + 4\varepsilon^2 a^2}$. Příslušný součet značme $R = r + r'$. Převedením na jednu stranu získáme

$$\begin{aligned}
4\varepsilon a r \cos\varphi + 4\varepsilon^2 a^2 &= R^2 - 2Rr \\
R^2 - 4\varepsilon^2 a^2 &= 2r\left(2\varepsilon a \cos\varphi + R\right) = 4ar_\mathrm{p} \frac{\frac{R}{2a} + \varepsilon \cos\varphi}{1 + \varepsilon \cos\varphi}
\end{aligned}$$

Protože levá strana na úhlu φ nezávisí, zvolíme šikovně $R = 2a$, aby na něm nezávisela ani pravá strana; tím jsme dokázali, že dvojice ohnisek skutečně existuje. Potom $r_\mathrm{p} = a\left(1 - \varepsilon^2\right)$ a porovnáním s definicemi r_r a ε zjistíme velkou poloosu elipsy a

$$\frac{L^2}{\gamma m^2} = -a \frac{2EL^2}{m^3 \gamma^2} \Rightarrow a = -\frac{m\gamma}{2E}$$

Tento vztah můžeme upravit do tvaru

$$E = -\frac{1}{2} \frac{GMm}{a} = \frac{1}{2} V,$$

který má mnohem obecnější platnost, což ukážeme v poslední kapitole.

Dosud jsme vlastně dokázali první dva ze tří Keplerových zákonů:

1. Planety se pohybují po elipsách, v jejichž ohnisku leží Slunce.

2. Plošná rychlost $r^2\dot{\varphi}/2$ se zachovává. (Rovná se $L/2m$.)

3. Pro velké poloosy elipsy a a oběžné doby T platí $a^3/T^2 = \text{konst.}$

Konstanta ve třetím zákoně se téměř shoduje pro všechny planety a závisí pouze na hmotnosti Slunce. Třetí zákon vyplývá z prvních dvou: Plocha zametená za oběžnou dobu se rovná ploše elipsy. Protože elipsa se pouze kružnice $S = \pi a^2$ stlačená v jednom rozměru (zobrazení se jmenuje pravoúhlá afinita), její obsah bude úměrný poměru stlačení $S' = b/a \cdot \pi a^2 = \pi ab$.

Excentricitu jsme definovali $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{L^2}{am^2\gamma}}$, takže pro malá poloosa se rovná $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \sqrt{\frac{L^2 a}{m^2\gamma}}$ a obsah elipsy vychází $S' = \pi a^{3/2}\frac{L}{m}\sqrt{\frac{1}{\gamma}}$. Zametená plocha se také podle druhého Keplerova zákona rovná plošné rychlosti $L/2m$ vynásobené oběžnou dobou T, což dokazuje třetí Keplerův zákon

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

14 Rozptyl

Náš postup byl dosud zcela obecný, takže rovnice kuželosečky platí pro všechny pohyby v centrálním poli, typ trajektrorie závisí na excentricitě ε.

Část IV
Ze zachování energie plyne zákon síly

15 Zákon síly

Za základ jsme vzali zákon zachování energie $E = T + V = \text{konst.}$, který se s dráhou x nemění. Derivací máme

$$\begin{aligned} \frac{m}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(v^2\right) &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\ mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \\ m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \end{aligned}$$

Zavedeme veličinu zvanou síla $F_x = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ a označíme zrychlení $a_x = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \ddot{x}$. Skutečnost, že tyto rovnice platí pro všechny tři složky síly i zrychlení vyjadřujeme tučným řezem a trojici čísel nazveme vektor

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Zákon zveme Newtonův druhý zákon nebo zákon síly.

16 Rovnice harmonického oscilátoru v termínech síly

Odvodíme sílu z potenciální energie podle derivačního vzorce $\frac{\mathrm{d}x^n}{\mathrm{d}x} = nx^{n-1}$. Síly v tabulce působí směrem od druhého tělesa.

obor	energie	síla
gravitace	$-\frac{GMm}{x}$	$-\frac{GMm}{x^2}$
elektřina	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x}$	$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{x^2}$
pružina	$\frac{1}{2}kx^2$	$-kx$
odstředivá	$-\frac{1}{2}mx^2\omega^2$	$mx\omega^2$
homogenní	mgx	$-mg$

Formálně se tedy můžeme vyhnout zachování energie zákonem síly, a dostaneme tak tentýž výsledek, k jakému dojdeme přímo derivováním rovnice pro energii.

16.1 Problém dvou těles

16.2 Tření

Část V
Proč platí zákony zachování?

Část VI
Statistická fyzika

17 Boltzmannův vzorec a jeho aplikace

17.1 Přirozený logaritmus

Inverzní funkce k exponenciále $y = \mathrm{e}^x$ se nazývá přirozený logaritmus a splňuje vztah $x = \mathrm{e}^y \Leftrightarrow y = \ln x$, který berme za definici, v níž požadujeme $x > 0$ pro $y \in \mathbb{R}$. Položme $x_1 = \mathrm{e}^{y_1} \Leftrightarrow y_1 = \ln x_1$, $x_2 = \mathrm{e}^{y_2} \Leftrightarrow y_2 = \ln x_2$. Vynásobením prvních částí $x_1x_2 = \mathrm{e}^{y_1+y_2} \Leftrightarrow y_1 + y_2 = \ln(x_1x_2)$, nicméně sečtením druhých částí $y_1 + y_2 = \ln x_1 + \ln x_2$. Odtud plyne pravidlo $\ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$.

Dále uvažujme $y = \ln x^n \Leftrightarrow x^n = \mathrm{e}^y \Rightarrow x = \mathrm{e}^{y/n} \Leftrightarrow \ln x = y/n$, že čehož dostáváme pravidlo mocnin $y = \ln x^n \Leftrightarrow y = n \ln x$. Pro $n \in N$ toto pravidlo plyne okamžitě z pravidla předchozího. Kombinací obou pravidel můžeme rozdíl logaritmů přepsat na logaritmus podílu.

Zbývá vyjádřit derivaci logaritmu: Do definice derivace dosadíme $y = \ln x$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Z definice exponenciály máme $e^{1/x} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{xn}\right)^n = \lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} \Leftrightarrow$ $1/x = \lim_{h\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$, kde jsme hned užili vzorce pro logaritmus mocninné funkce. Derivace přirozeného logaritmu je převrácená hodnota

$$\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x},$$

z čehož použitím pravidla pro derivaci složené funkce plyne vztah potřebný dále

$$\frac{\mathrm{d}\ln y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

17.2 Teplota a Boltzmannův vzorec

Konkrétní uspořádání poloh s danou energií nazýváme stav soustavy. V této části uvažujeme pouze diskrétní soustavy, v nichž energie nenabývá libovolných hodnot, ale pouze určité množiny energie (například celočíselných násobků základní energie). Představme si soustavu několika takových objektů. Jako celek má tato soustava energii E, kterou nazýváme makrostav. Konkrétní rozdělení energie mezi jednotlivé objekty nazýváme mikrostav. Pro dostatečně velké statistické soubory platí druhý termodynamický zákon:

Soustava v daném makrostavu se po dostatečně dlouhé době nachází ve stavu, aby připadalo v úvahu co nejvíce mikrostavů.

Takový stav nazýváme tepelná rovnováha a vyšetříme, jaká podmínku systém splňuje. Rozdělme soustavu s N mikrostavy na dvě podsoustavy s $N_1(E_1)$ a $N_2(E_2)$ mikrostavy. Protože na sobě nezávisí, celkový počet možných mikrostavů se rovná součinu $N = N_1 N_2$. Označme jejich příslušné energie E_1 a E_2, při čemž se ovšem jejich součet zachovává $E_2 = E - E_1$. Podle druhého termodynamického zákona nabývá celkový počet mikrostavů maxima

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_1}\left[N_1(E_1)\,N_2(E-E_1)\right] &= 0\\
N_2\frac{\mathrm{d}N_1(E_1)}{\mathrm{d}E_1} + N_1\frac{\mathrm{d}N_2(E_2)}{\mathrm{d}E_1} &= 0\\
N_1N_2\left(\frac{\mathrm{d}\ln N_1}{\mathrm{d}E_1} - \frac{\mathrm{d}\ln N_2}{\mathrm{d}E_2}\right) &= 0,
\end{aligned}$$

protože $\mathrm{d}E_1 = -\mathrm{d}E_2$. V tepelné rovnováze se obě derivace rovnají téže hodnotě $\frac{\mathrm{d}\ln N}{\mathrm{d}E} = \frac{1}{kT}$, pomocí níž zavádíme termodynamickou teplotu T. Základní zákon statistické mechaniky – Boltzmannův vzorec – plyne přímo z této definice

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{N}{kT} \tag{5}$$

Protože přírustek funkce je přímo úměrný funkční hodnotě, funkce roste tím rychleji, čím vyšší má hodnotu. Ověřte pravidlem derivování složené funkce, že rovnici vyhovuje

$$N = N_0 e^{E/kT}.$$

Protože pravděpodobnost jednoho stavu se rovná převrácené hodnotě celkového počtu stavů, dostáváme slavný Boltzmannův vzorec pro pravděpodobnost (značka w z německého Wahrscheinlichkeit) daného stavu

$$w = w_0 e^{-E/kT},$$

kde w_0 je určeno normovací podmínkou celkové jednotkové pravděpodobnosti.

Boltzmannův vztah vlastně nepřínáší vůbec nic, akorát se jím definuje teplota. Teplotu jsme mohli ve místo vztahu $\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \frac{N}{kT}$ zavést jako $\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = f(T)$ a někdy se používá prostá přímá úměrnost. Ukážeme, že výhoda prvního zavedení spočívá v tom, že mnoho veličin (například energie plynu) pak závisí na teplotě lineárně a snadno se měří.

18 Ideální plyn

19 Bosony a vyzařování černého tělesa

20 Fermiony a rozdělení elektronů v kovu

Reference

[1] Wittgenstein, Ludwig: Tractatus logico philosophicus.

[2] Landau, Lev Davidovič. Kurs teoretické fyziky.

[3] Arfken, George a Weber, Hans: Mathematical methods for physicists.