Analytická geometrie v rovině

Jakub Michálek

4. února 2008

1. Přímka AB má směrnici $m = \frac{8}{11}$; osa této úsečky má proto směrnici $m_\perp = -\frac{11}{8}$ a prochází bodem $\mathsf{S_{AB}} = \begin{pmatrix} 8.5 \\ 6 \end{pmatrix}$.[1] Osa o_{AB} má rovnici $o_{\mathsf{AB}} : y = -\frac{11}{8}(x - 8.5) + 6$.

   (a) Střed $\mathsf{S_{CD}}$ získáme jako průsečík o_{AB} a rovnoběžky AB procházející D, která má rovnici

   $$\mathsf{CD} : y = \frac{8}{11}(x-2) + 8,$$

   takže řešíme rovnost

   $$\begin{aligned} \frac{8}{11}(x-2) + 8 &= -\frac{11}{8}(x - 8.5) + 6 \\ x_S &= 5.3 \Rightarrow y_S = 10.4 \end{aligned}$$

   Odtud již plyne pro vodorovnou souřadnici

   $$C_x = 2x_S - D_x = 8.6 \Rightarrow C_y = 12.8$$

   Bod C má souřadnice $\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 8.6 \\ 12.8 \end{pmatrix}$.

   (b) Střed kružnice leží na ose o_{AB} a na ose o_{AD}, která má rovnici (analogický postup jako výše)

   $$o_{\mathsf{AD}} : y = \frac{1}{6}(x - 2.5) + 5$$

   Mají tedy společný průsečík (střed kružnice opsané)

   $$\begin{aligned} \frac{1}{6}(x - 2.5) + 5 &= -\frac{11}{8}(x - 8.5) + 6 \\ x &= 8.5 \Rightarrow y = 6 \end{aligned}$$

   Střed kružnice opsané tedy leží ve středu úsečky AB. Poloměr kružnice proto bude $r^2 = 46.25$, takže rovnice kružnice vychází

   $$(x - 8.5)^2 + (y - 6)^2 = 46.25$$

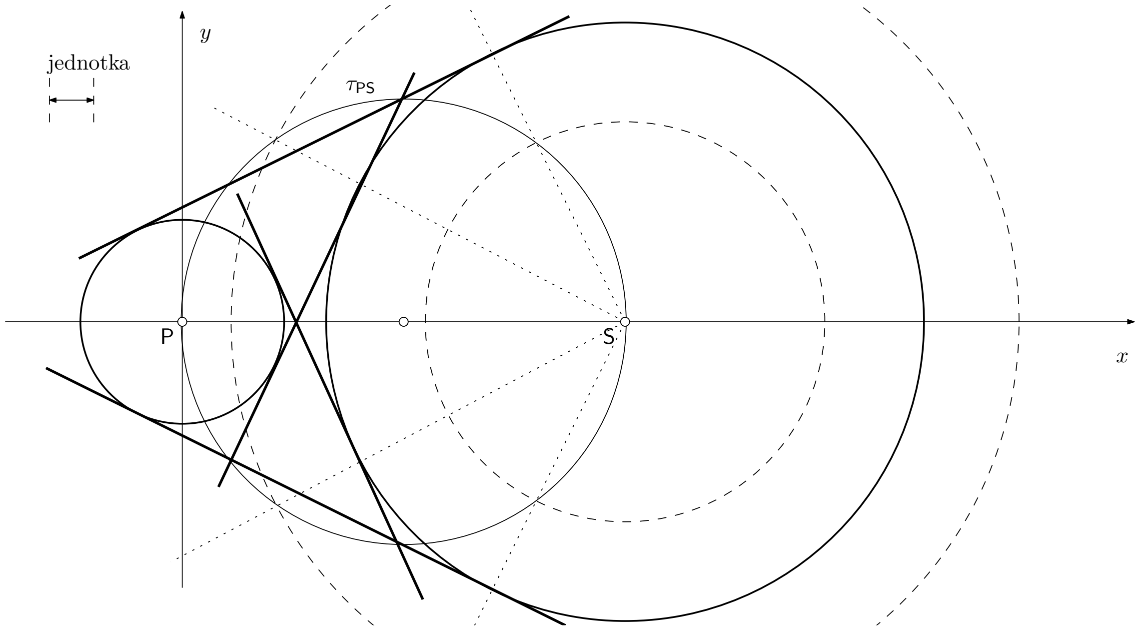
   (c) Střed vepsané kružnice leží na ose souměrnosti o_{AB} lichoběžníka. Proto je nutnou podmínkou kružnice vepsané, že má poloměr rovný polovině vzdálenosti základen, která se rovná $2r = \mathsf{S_{AB}S_{CD}} = \sqrt{29.6}$. Další nutná podmínka vyžaduje, aby se tento poloměr rovnal vzdálenosti domnělého středu $\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 6.9 \\ 8.2 \end{pmatrix}$ od strany $\mathsf{AD} : 6x + y - 20 = 0$

   $$|\mathsf{AD}, \mathsf{S}| = \frac{29.6}{\sqrt{37}} \doteq 4.87 \neq 2.72$$

   Kružnice by měla mít vzdálenost středu od bodů dotyku stejnou, dostáváme spor. Tomutu lichoběžníku nelze vepsat kružnici.

2. Kružnice $(x - 10)^2 + y^2 = 45$ má střed v bodě $\mathsf{S_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}$ a poloměr $3\sqrt{5}$. Kružnice $x^2 + y^2 = 5$ má střed v počátku souřadnic a poloměr $\sqrt{5}$. Budou mít čtyři společné tečny. Vzhledem k zadaným číslům řešme úlohu zmenšením/zvětšením poloměru velké kružnice.

[1] Jeho souřadnice píšeme v sloupci, protože se jedná o kovariantní vektor.



Obrázek 1: Řešení druhé úlohy narýsované na počítači. **Postup konstrukce**: 1. Zvětšíme a zmenšíme poloměr velké kružnice o poloměr malé kružnice, 2. Sestrojíme Thaletovu kružnici nad úsečkou PS, 3. Spojíme průsečíky každé kružnice (1) a Thaletovy kružnice se středem velké kružnice, 4. Pod dotyku zjistíme jako průsečík spojnice (4) s původní kružnicí. Tečna je kolmá na spojnici bodu dotyku se středem velké kružnice.

Hledáme potom tečnu z počátku ke kružnici $(x-10)^2+y^2=\left(3\sqrt{5}\pm\sqrt{5}\right)^2=5\,(3\pm1)^2$. Pro směrnici tečen pak platí

$$m=\tan\alpha\equiv\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}},$$

kde úhel α definujeme jako $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{5}}{10}$, tedy buď $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ nebo $\sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Po dosazení dostáváme

$$m\in\left\{\pm\frac{1}{2},\pm2\right\},$$

kde jsme zohlednili, že směrnice mohou být i záporné. Stačí dopočítat bod dotyku (na kružnici v počátku). Derivace kružnice vychází

$$y=\sqrt{5-x^2}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-x}{\sqrt{5-x^2}}=m\Rightarrow x=\sqrt{\frac{5m^2}{m^2+1}}$$

m	2	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_0	2	2	-1	-1
y_0	-1	1	2	-2

Tabulka 1: Přípustné směrnice a souřadnice ležících bodů.

Dostáváme tedy čtyři rovnice

$$\begin{aligned}0&=2x\pm y-5\\0&=x\pm2y+5.\end{aligned}$$

3. Orientujme souřadnou soustavu tak, aby počátek ležel v bodě A. Bod $\mathsf{B}=\begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ a bod $\mathsf{C}=\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$. Souřadnice ortocentra O (průsečíku prodloužených výšek) musí být $\mathsf{O}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, protože jedna výška je svislá a prochází bodem C. Hledejme přímku procházející bodem B, která je kolmá na přímku AC

$$\begin{aligned} v_{\mathsf{AC}} : y &= -\frac{x}{v}(x-c) \\ vy - \frac{c^2}{4} &= -x^2 + cx - \frac{c^2}{4} = -\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 \\ 2\frac{v}{2}\left(y - \frac{c^2}{4v}\right) &= -\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Jedná se o parabolu s parametrem $p=\frac{v}{2}$, vrcholem $\mathsf{V}=\begin{pmatrix} \frac{c}{2} \\ \frac{c^2}{4v} \end{pmatrix}$, ohniskem $\mathsf{F}=\begin{pmatrix} \frac{c}{2} \\ \frac{c^2-v^2}{4v} \end{pmatrix}$ a řídící přímkou $y=\frac{c^2+v^2}{4v}$.

4. Levá strana je definovaná pouze pro $x \in \langle 0, 2\rangle$. Řešíme ekvivalentní nerovnici $\sqrt{1-(x-1)^2} \le \frac{x-1}{2}$. V definičním oboru se pravá strana postupně zvyšuje z $-\frac{1}{2}$ až na $\frac{1}{2}$. Protože levá strana musí být nezáporná, do řešení určitě nebudou patřit x, pro která je pravá strana záporná. Řešení je proto podmnožinou $\langle 1, 2\rangle$. Na tomto intervalu jsou obě strany kladné a rovnici umocníme

$$\begin{aligned} 1-(x-1)^2 &\le \frac{1}{4}(x-1)^2 \\ 1+\sqrt{\frac{4}{5}} &\le x \end{aligned}$$

Rovnici tudíž řeší $x \in \left\langle 1+\sqrt{\frac{4}{5}}, 2\right\rangle$. Ekvivalentní grafické řešení ilustruje nerovnost půlkružnice a přímky.