$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

Jakub Michálek

8. prosince 2006

1. **Parciální zlomky**. Upravíme-li jmenovatel zlomku na součin, můžeme daný zlomek rozložit na dva jiné zlomky, z nichž každý má ve jmenovateli jeden z činitelů původního součinu

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2-2x^2} = \frac{1}{\left(x^2+1+\sqrt{2}x\right)\left(x^2+1-\sqrt{2}x\right)} \\ &= \frac{Ax+B}{x^2+1+\sqrt{2}x} + \frac{Cx+D}{x^2+1-\sqrt{2}x}.\end{aligned}$$

2. **Čitatele zlomků**. Roznásobení nám umožní vyjádřit hledané konstanty A, B, C, D.

$$Ax^3 + Ax - A\sqrt{2}x^2 + Bx^2 + B - B\sqrt{2}x + Cx^3 + Cx + C\sqrt{2}x^2 + Dx^2 + D + D\sqrt{2}x = 1.$$

Aby platila tato rovnost pro všechna x, musí platit dílčí rovnosti pro každou mocninu.

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -A\sqrt{2} + B + C\sqrt{2} + D &= 0 \\ A - B\sqrt{2} + C + D\sqrt{2} &= 0 \\ B + D &= 1 \end{aligned}$$

Odtud plyne $B = 1 - D$ a $C = -A$. Dosazením dostáváme podmínky

$$\begin{aligned} -A\sqrt{2} + 1 - D - A\sqrt{2} + D &= 0, \\ A - (1-D)\sqrt{2} - A + D\sqrt{2} &= 0. \end{aligned}$$

Úpravou získáme pro činitele $A = \frac{\sqrt{2}}{4}, D = \frac{1}{2} = B$. Proto také $C = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Výsledný zlomek lze přepsat na

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x+1}{x^2+1+\sqrt{2}x} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x-1}{x^2+1-\sqrt{2}x}\right). \tag{1}$$

3. **První integrál**. Vhodným vynásobením a přičítáním dostaneme do čitatele zlomku derivaci jmenovatele, pak použijeme pravidlo $\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C$,

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+2\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}.$$

Nyní již oba integrály umíme spočítat podle obvyklých pravidel – použijeme vzorec $\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$. První integrál vychází

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right).$$

4. **Druhý integrál**. Obdobným postupem vypočteme zbytek

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}x-1}{x^2-\sqrt{2}x+1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{2x-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \frac{1}{4}\frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{x-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right| - \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right).
\end{aligned}$$

5. **Shrnutí**. Dosazením nalezených integrálů do (1) vyřešíme

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)\right] + C.$$